Definice. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme *algebraické*, jestliže existuje polynom $P(x)$ kladného stupně s celočíselnými koeficienty takový, že $P(\alpha) = 0$. Číslo nazveme *transcendentní*, jestliže není algebraické.

Tvrzení VI.1. [Dirichlet.] Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}$. Pak existují p, q celá, navíc $1 \leq q \leq N$ tak, že $|q\alpha - p| < 1/N$ (a tedy $|\alpha - p/q| < 1/q^2$).

Tvrzení VI.2. [Liouville.] Buď α iracionální číslo, transcendentní číslo. Pak existují $c > 0$ a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ takové, že pro všechna celá p, q, $q \neq 0$ je $|\alpha - p/q| \geq c/q^n$.

Tvrzení VI.3. Číslo $\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k!}}$ je transcendentní.

Tvrzení VI.4. Číslo π je iracionální.

Tvrzení VI.5. Nechť α je racionální číslo, různé od nuly. Potom e^α je iracionální.

***VI.6.** Definuji *necelou část* čísla $x \in \mathbb{R}$ jako $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

1. ukažte, že posloupnost $n \mapsto \{\alpha n\}$ je periodická resp. chaotická (upřesněte) dle toho, je-li α racionální

2. ukažte, že hromadné body posloupnosti $n \mapsto \sin n$ tvoří právě celý interval $[-1, 1]$.

VI.1. Viz Jarník, Diferenciální počet 2, str. 73.

VI.3. S ohledem na střídání znamének je

$$0 < \left|\theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k!}}\right| < \frac{1}{2^{(n+1)!}}$$

Odtud nejprve iracionalita a poté (Liouviellova věta) spor při dosti velkém n.

VI.4. Sporem: nechť $\pi = p/q$. Polož $f(x) = q^n x^n (\pi - x)^n / n!$. Per-partes je

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi),$$

kde $F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)$. Levá strana je kladná a má (pro $n \to \infty$) limitu nula. Na pravé straně jsou však (klíčové pozorování!) jen celá čísla ...

VI.5. Stačí ukázat, že e^m je iracionální pro $m \in \mathbb{N}$. Sporem: nechť $e^m = p/q$, a použije se obdobný postup jako v případě π, kde volíme $f(x) = qx^n(1-x)^n/n!$ a uvažujeme integrál

$$\int_0^1 m^{2n+1} e^{mx} f(x) \, dx$$

**VI.6.* 1) uvažte, že pro α iracionální lze Liouviellova věta použít pro libovolně velká $q \in \mathbb{N}$

2) užijte předchozí bod s tím, že $\sin n = \sin 2\pi\{n/2\pi\}$

Viz též Jarník, Diferenciální počet 2, str. 74.