VIII.1 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak všechna řešení rovnice $y' = f(y)$ jsou monotónní.

VIII.2 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že $f(y) = 0$ pro $y \leq 0$ a $f(y) > 0$ pro $y > 0$. Ukažte, že rovnice

$$y' = f(y), \qquad y(0) = 0$$

má netriviální (tj. nenulové) řešení právě tehdy, když

$$\int_0^\delta \frac{du}{f(u)} < +\infty$$

pro nějaké (každé) $\delta > 0$.

***VIII.3** Najděte všechny diferencovatelné funkce $y : [0, \infty) \to [0, \infty)$, splňující rovnici

$$y'(x^2) = y(x), \quad y(0) = 0\,.$$

***VIII.4** Nechť y je C^2 funkce, splňující $y''(x) + y'(x) + y(x) \to 0$ pro $x \to +\infty$.

Potom též $y(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. Dokažte.

Tvrzení VIII.5 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, nechť $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ respektive $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité a nechť platí $f_1 < f_2$ všude v Ω.

Nechť $y_1 : I \to \mathbb{R}$ respektive $y_2 : I \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice $y' = f_1(x, y)$ respektive $y' = f_2(x, y)$ v Ω. Nechť $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ pro jisté $x_0 \in I$. Potom $y_1(x) < y_2(x)$ pro všechna $x \in I$, $x > x_0$.

1. Zformulujte speciální případy pro $f_1 \equiv 0$ resp. $f_2(x, y) = a + by$ (kde a, b jsou kladné konstanty), Ω je první kvadrant.
2. Zformulujte analogické tvrzení tak, aby závěr platil pro všechna $x \in I$, $x < x_0$.

*3. Platí uvedená věta, nahradíme-li všechny nerovnosti neostrými?

Tvrzení VIII.6 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, $I \subset \mathbb{R}$ interval. Nechť $y_1 : I \to \mathbb{R}$ splňuje diferenciální nerovnici $y_1' < f(x, y_1)$, nechť $y_2 : I \to \mathbb{R}$ splňuje příslušnou rovnici, tj. $y_2' = f(x, y_2)$. Nechť $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ pro nějaké $x_0 \in I$. Potom $y_1(x) < y_2(x)$ pro všechna $x \in I$, $x > x_0$.

***VIII.7** [Osgoodovo kritérium jednoznačnosti.] Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje

$$|f(y) - f(z)| \leq \omega(|y - z|)$$

kde $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ (tzv. modul spojitosti) splňuje

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = \infty \qquad \forall \delta > 0.$$

Potom rovnice $y' = f(y)$ má pro danou počáteční podmínku (lokálně) jediné řešení.

VIII.8 Nechť $\{\gamma_c\}$ je systém hladkých křivek v rovinně, kde c probíhá nějakou množinu parametrů. Křivku ψ nazveme *obálkou* tohoto systému, jestliže každý bod ψ sdílí tečnu s jistou křivkou γ_c.

1. Pokud všechny křivky $\{\gamma_c\}$ řeší jistou ODR 1. řádu, pak jejich obálka řeší stejnou ODR.

*2. Jsou-li křivky $\{\gamma_c\}$ popsány (implicitně) rovnicemi $F(x, y, c) = 0$, pak jejich obálka je popsána soustavou

$$F(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0$$

3. Uvažte systém úseček konstantní délky $a > 0$, spojujících osy prvního kvadrantu. Najděte příslušnou obálku. Jakou diferenciální rovnici splňuje?

VIII.9 [Clairautova rovnice.] Uvažujme rovnici tvaru

$$y = xy' + f(y')$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána.

1. Ukažte, že existuje řešení ve tvaru $y = cx + d$, kde c, d jsou vhodné konstanty.
2. Najděte obecná řešení, jakož i jejich obálku (tzv. singulární řešení) Clairautových rovnic

$$y = xy' + \cos(y') \qquad y = xy' + 1/y'$$

Nakreslete příslušné obrázky!

Nápověda / řešení viz následující strana.

1) **Lemma.** Nechť I je interval, $y : I \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom y je monotónní $\iff$ $\forall x_1 < x_2 \in I$ platí, že pokud $f(x_1) = f(x_2)$, je f konstantní na $[x_1, x_2]$.

   Aplikace „ $\Longleftarrow$ " v lemmatu (TRIK): rovnici násobte $y'(x)$ a integrujte $\int_{x_1}^{x_2} dx$.

2) Viz řešení rovnic se separovanými proměnnými.

3) Pouze $y \equiv 0$.

4) Uvažte, že funkce $y(x)$ je řešením rovnice $y'' + y' + y = f(x)$, kde $f(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. Užijte variaci konstant.

5.3) Neplatí! Neostré varianty speciálně implikují jednoznačnost řešení (odůvodněte podrobně), k čemuž ale předpoklad spojitosti f, jak víme, obecně nestačí.

6) Jistě $y_1(x) < y_2(x)$ na $[x_0, \delta)$ díky spojitosti. Sporem: nechť existuje $\tilde{x} > x_0$ t.ž. $y_1(\tilde{x}) \geq y_2(\tilde{x})$. BÚNO vezmi nejmenší $\tilde{x}$ takové (proč existuje?). Pak ovšem $y_1(\tilde{x}) = y_2(\tilde{x})$, a tedy $y_1'(\tilde{x}) < y_2'(\tilde{x})$. Odtud ale spor s minimalitou $\tilde{x}$.

8.1) Uvažte, že ODR 1. řádu je vztah mezi bodem a tečnou křivky.

8.3) Astroida.

9.1) $c \in \mathbb{R}$ libovolné, $d = f(c)$.

9.2) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ resp. parabola.