22.3.2021

Téma: teorie čísel ($\Leftrightarrow$ součiny, Stirling.)

Def. $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ ... posloupnost prvočísel (rostoucí, všech)

$$\pi(x) := \max\{k;\ p_k \le x\}$$

($\Leftrightarrow$ počet prvočísel $\le x$)

... tzv. prvočíselné funkce

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \forall x > 1$$

($x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} x > 1$)

... Riemannova zeta funkce.

Prvočíselná věta. $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x}, \quad x \to \infty.$

Značení.

řádová rovnost: $f(x) \sim g(x),\ x \to +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

asympt. rovnost: $f(x) \approx g(x),\ x \to +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Tvrzení 1. [Čebyšev] $\exists\, C_1, C_2 > 0\ \exists\, x_0 > 0$

t.ž. $$\frac{C_1 x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq \frac{C_2 x}{\ln x}, \quad \forall x > x_0.$$

Dk. uvažuji $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ... centrální binomický koeficient

1. asymptotika ... užiji Stirlinga

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2n}\left(\frac{2\cancel{n}}{\cancel{e}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{n}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{e}}\right)^{n}\right)^{\cancel{2}}}$$

$\left(n! \sim \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right.$, $\left. n \to \infty \right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot 4^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

2. rozklady (viz série III*)

... obecnější problém:

$$\binom{n}{k} = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N}$$

kde r_j ... prvočísla

$n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ... exponenty

Př.: $\binom{36}{7} = \overset{32}{2^5} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31$

$\binom{50}{25} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot \underset{49}{7^2} \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$

Platí obecně: (0) $r_j \le n$, tedy $N \le \pi(N)$

(i) $n \geq p_k > \max\{k, n-k\}$

$\Rightarrow$ s exponentem $= 1$

× (ii) $n_j \geq 1$ $\left(\Leftrightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \right)$

(iii) $\forall$ činitel $r_j^{n_j} \le n$

---

3. odhad a) dolní:

$$\binom{2n}{n} = r_1^{n_1} \cdots r_N^{n_N} \le (2n)^{\pi(2n)} \quad / \ln$$

neboť: nejvýše $\pi(2n)$ činitelů

$\forall \le 2n$

$$\pi(2n)\cdot \ln 2n \ge \ln\binom{2n}{n} \ge \ln\left(\frac{c_1 4^n}{\sqrt{n}}\right)$$

víme: $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n}}$, tj.:

$$\binom{2n}{n} \ge \frac{c_1 4^n}{\sqrt{n}} \quad \text{(pro } n \text{ velké)}$$

$$\pi(2n)\cdot \ln 2n \ge \ln c_1 + n\cdot \ln 4 - \frac{1}{2}\ln n$$

$$\pi(2n) \ge \underbrace{\frac{\ln c_1 + (\ln 4)\cdot n - \frac{1}{2}\ln n}{\ln 2n}}_{\sim \frac{n}{\ln n},\ n\to\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \pi(2n) \ge \frac{c_3 n}{\ln n} \quad \text{(} n \text{ dost velké)}$$

přechod ke spojité proměnné:

$$\pi(x) \ge \pi\left(2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor\right) \ge \frac{c_3 \left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor}{\ln \left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor} \quad \text{(} x \text{ velké)}$$

$y-1 \le \lfloor y \rfloor \le y$

$$\sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty)$$

a tedy

$$\ge \frac{C_1 x}{\ln x} \quad (x \text{ velké})$$

---

b) horní: $\binom{2n}{n} = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$

$$\ge \prod_{n < p_k \le 2n} p_k$$

$$\ge n^{\pi(2n) - \pi(n)} \quad / \ln$$

$$\left(\pi(2n) - \pi(n)\right) \ln n \le \ln \binom{2n}{n}$$

$$\le c_4 \cdot n$$

závěr horní odhad

$(n \text{ velké})$

ne nejistě proměnné: volme $x \ge 2$

volme $n \in \mathbb{N}$ t.ž. $2n-2 \le x \le 2n$

$$n-1 \le \frac{x}{2} \le n$$

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \le \pi(2n) - \underbrace{\pi(n-1)}_{\ge \pi(n)-1}$$

$$\le \underbrace{\pi(2n) - \pi(n)}_{\le c_4 \cdot n} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \le c_5 \frac{x}{\ln x}}$$

$\forall x$ velké, čili pro $\forall x \ge 2$ (zvětšíme c_5)

TRIK: teleskopické sumy:

$$\left(\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \ln x \le c_5 x$$

$$\pi(x) \cdot \ln x - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \ln \frac{x}{2} =$$

$$= \underbrace{\left(\pi(x) - \pi\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\cdot \ln x}_{\le c_5 x} + \pi\left(\tfrac{x}{2}\right)\underbrace{\left(\ln x - \ln \tfrac{x}{2}\right)}_{\ln 2\, \underbrace{\pi\left(\frac{x}{2}\right)}_{\le \frac{x}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi(x)\cdot \ln x - \pi\left(\tfrac{x}{2}\right)\ln \tfrac{x}{2} \le c_6 x \qquad \forall x \ge 2}$$

poslední krok:

$$\underline{\underline{\pi(x)\cdot \ln x}} = \sum_{j=0}^{r-1} \pi\left(\frac{x}{2^j}\right)\ln\left(\frac{x}{2^j}\right) - \pi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\ln \frac{x}{2^{j+1}}$$

$$+ \underbrace{\pi\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right)\ln\left(\frac{x}{2^{r+1}}\right)}_{\le 0}$$

volím r t.ž. $\frac{x}{2^{r+1}} \le 1$

$$\le \sum_{j=0}^{r-1} c_6 \frac{x}{2^j} \le \underline{\underline{c_7 \cdot x}} \qquad \forall x \ge 2.$$

$\square$

Důsl. $\{p_k\}$ obsahuje libovolně velké mezery

obecněji: $p_k \geq$??

$\leq$??

Tvrzení 2.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (\forall x>1).$$

(Euler)

Dk. „BÚNO": $\boxed{x=1}$

formálně: PS: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdots$

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)$$

$$\frac{1}{3} \qquad\qquad \frac{1}{36}$$

Pořádný důkaz: příště.

Důk. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$.

$x=1$: $\displaystyle +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$

Víme: $\displaystyle\iff \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)}_{b_k} = +\infty$

(viz II.)

$$b_k \sim \frac{1}{p_k}$$

$$b_k = -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

$\square$

Opravte: $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{(2^n)}}\right) = 2$

(II* c)

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{(2^n)}\right) = \frac{1}{1-x}$$

Téma: řady s kladnými členy

Úmluva. $\sum a_n$, $a_n > 0 \ \forall n$

Tvrzení 1. [Zlomkové kritérium.]

Nechť platí

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}} \quad (*)$$

, pro n dost velké.

Potom: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div.

Dk. BÚNO $(*)$ platí pro $\forall n \ge 1$

$$a_n = \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{\cancel{a_1}} \cdot \cancel{a_1}$$

$$\overset{(*)}{\le} \frac{b_n}{\cancel{b_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{b_{n-1}}}{\cancel{b_{n-2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{b_2}}{b_1} \cdot a_1 = b_n \cdot \frac{a_1}{b_1}$$

$\Rightarrow$ $a_n \leq C \cdot b_n \quad \forall n \quad \left(C = \frac{a_1}{b_1} \right)$

užij srovnávací kritérium.

Tvrzení 2 [Raabeho kritérium]

Nechť $a_n > 0$, nechť $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \mu$.

Pak: (i) $\mu < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv.

(ii) $\mu > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div.

Pozn. podílové kritérium:

Nechť $a_n > 0$, nechť $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$

Pak: (i) $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv.

(ii) $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div.

$\boxed{q = 1}$??