Tvrzení 2 $\underbrace{\prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_r^x}}}_{P} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}}_{S}, \ \forall x>1.$ 29.3.

Dk. $\boxed{x=1}$

1. „$\geq$": volme $S' < S$ … libovolné

$\exists N \in \mathbb{N}$ t.ž. $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > S'$

uvažme prvočíselné rozklady (všechny)

$$n^x = r_1^{x n_1} \cdots r_j^{x n_j}$$, kde r_j … prvočísla, $n_j \in \mathbb{N}$

($\exists!$ dle ZVA)

nechť p_K … největší prvočíslo

m … největší exponent

$$P \geq \prod_{r=1}^{K} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}}_{=\,1+\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p_r^2}+\cdots} \geq \prod_{r=1}^{K} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{p_r^l} \right) =$$

$$= \dots \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > S' \Rightarrow P \geq S$$

roznásobíme

---

2. „$\leq$": volme $P' < P$, libovolné

$$\exists K \in \mathbb{N} \text{ t.ž. } P' < \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{(K)} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_k^j} \right)$$

(VoAL)

$$= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_k^j}$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.ž. } P' < \prod_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_k^j}$$

$$= 1 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \dots \left(\text{konečný součet různých čísel tvaru } \frac{1}{n} \right) \leq S$$

roznásob

$\square$

Pozn.: při. III.2*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q_n) = (1+q_1)(1+q_2)\cdots$$

$$= 1 + q_1 + q_2 + \dots + q_1 q_2 + q_2 q_3 + \dots$$

„roznásobit"

---

aplikace: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+x^{(2^n)}\right) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots$

---

téma: řady s kladnými členy

Pozn. srovnávací kritérium:

$a_n \leq c \cdot b_n \quad (n \geq n_0)$

$(++)$ $\begin{cases} \sum b_n \text{ konv} \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.} \\ \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div.} \end{cases}$

„podílové" kritérium:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n \geq n_0) \quad \dots \ (++)$ platí

Podílové kritérium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q \quad \dots \quad \begin{array}{l} q<1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.} \\ q>1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div.} \\ \boxed{q=1} \ ?? \end{array}$$

Raabeho krit.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to r \quad \dots \quad \begin{array}{l} r>1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.} \\ r<1 \Rightarrow \sum a_n \text{ div.} \end{array}$$

Pozn. ad $\underline{\overline{\text{IV}}}$ 3,4:

(mnohem ~~větší~~ menší)

$$\sum a_n \text{ div.} \Rightarrow \exists\, \tilde{a}_n \text{ s.ž. } \frac{a_n}{\tilde{a}_n} \to \cancel{0}\ \infty$$

$$\text{leč } \sum \tilde{a}_n \text{ div}$$

$$\sum a_n \text{ konv.} \Rightarrow \exists\, \tilde{a}_n \text{ s.ž. } \frac{\tilde{a}_n}{a_n} \to \infty$$

$$\text{leč. } \sum \tilde{a}_n \text{ konv.}$$

ad IV.1. idea: srovnáme $\sum a_n$, $\sum \frac{1}{n^\lambda}$

pomocí J.1 (zlomkové krit.)

(ii) $$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \iff ??$$

(i) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{?}{\leq} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^\lambda}{\frac{1}{n^\lambda}} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{-1}$$

platí: $$1 + \lambda' x \leq (1+x)^\lambda \leq 1 + \lambda x$$

$\lambda' < \lambda$ pevné

$x > 0$ malé

---

ad IV.2: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n = \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}{n!}, \quad \alpha > 0$$

ad IV.3 ?? $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv; $b_n = \frac{a_n}{s_n}$

$\Rightarrow$ B.C. podmínka: $\exists\, n_0$ t.ž. $\forall m > n_0$

$$\frac{1}{2} \ge \sum_{n=n_0+1}^{m} b_n = \sum_{n=n_0+1}^{m} \frac{a_n}{s_n} \ge \frac{1}{s_m} \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n$$

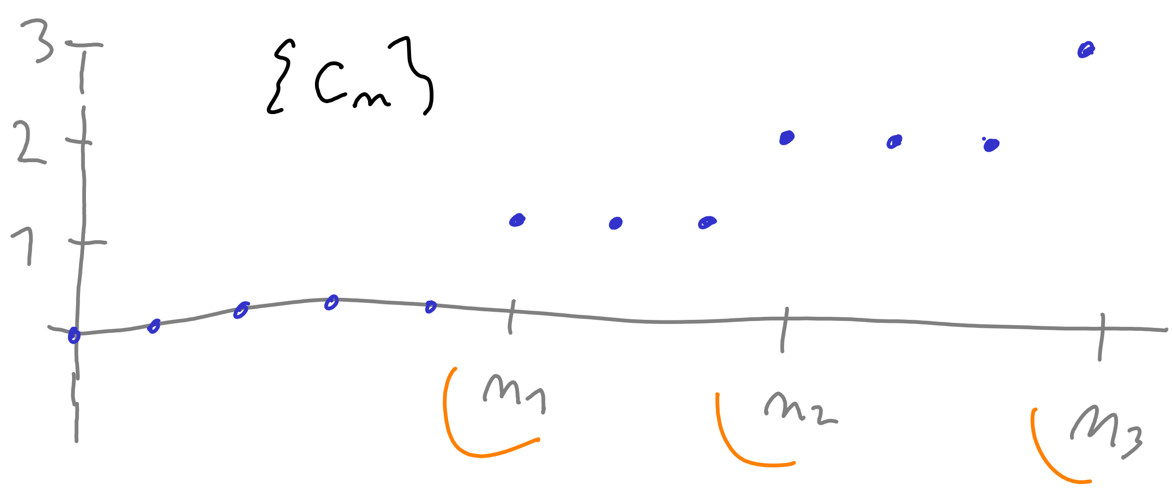
Leč: $\sum_{n=n_0+1}^{m} a_n = s_m - s_{n_0}$

tj. $$\frac{1}{2} \ge \frac{s_m - s_{n_0}}{s_m} = 1 - \underbrace{\frac{s_{n_0}}{s_m}}_{\downarrow\, 0}$$

$\Rightarrow$ SPOR (m velké)

---

ad IV.4.



n_1 ... index navýšení $0 \to 1$

volím s.t. $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n < \frac{1}{2}$

n_2 ... index navýšení $1 \to 2$

volíme s.t. $\sum_{n=n_2}^{\infty} 2a_n < \frac{1}{4}$

---

ad IV.2* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ (??)