Pozn. k sérii č. 5

1) bijekce nezachová míru (ani nulovou množinu)

mohutnost množiny („počet prvků") ⟵ bijekce

míra množiny („délka") ⟵ spočetné pokrytí intervaly

2) ad Lemma 1, část 2: ... konec v důkaze ...

$$\sum_{k,j} |I_{kj}| \overset{(?)}{=} \sum_k \left(\sum_j |I_{kj}| \right)$$

?

obecné sumy

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$$

---

ad série VI.

Pozn. $\alpha \neq 0$ je racionální $\Longleftrightarrow$ $\exists\, p, q \in \mathbb{Z},\ p \neq 0$ s.t. $q\alpha - p = 0$.

$\left(\alpha = \frac{p}{q}\right)$

$\alpha \neq 0$ je algebraické $\Longleftrightarrow$ $\exists\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ s.t.

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$\left(P(\alpha) = 0,\ kde\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)$

Diofantické aproximace: $\left(p, q \in \mathbb{Z}, \; r \in \mathbb{R}\right)$ $q \neq 0$ ↑ chyba

$\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad q\alpha - p = r$

1) snadné: $r \in [0,1) \iff \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$

2) Dirichletova věta VI.1.

$N \in \mathbb{N}$ dáno: $\exists p \in \mathbb{Z}, \; q \in \{1, \dots N\}$

$|q\alpha - p| < \frac{1}{N} \iff \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$

Tvrzení VI.2. [Liouville.]

Buď α iracionální, algebraické. Pak $\exists\, c > 0, \; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ t.ž. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$, pro $\forall\, p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0$.

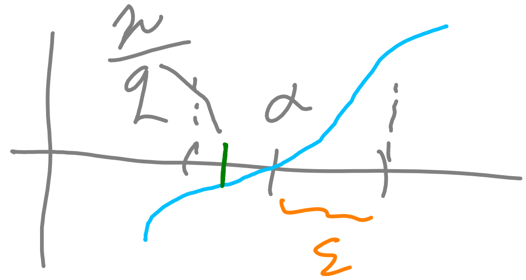
Dk. nechť $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; $a_k \in \mathbb{Z}, \; a_0 \neq 0$

t.ž. $P(\alpha) = 0$. $\qquad n \geq 2$

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.ž. $P(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$

$x \neq \alpha$

$M := \max\{P'(x);\ |x-\alpha| \le \varepsilon\}$



Buďte: $r, q \in \mathbb{Z}$, $\overset{q>0}{\cancel{q \neq 0}}$ ... libovolné

i) $\frac{r}{q} \notin (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \Rightarrow \left|\alpha - \frac{r}{q}\right| \ge \varepsilon \ge \frac{\varepsilon}{q^2}$

nerov. platí: $C = \varepsilon$

$n = 2$

ii) $\frac{r}{q} \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ ... jistě $\frac{r}{q} \neq \alpha$ (irac.)

$$0 \neq P\left(\frac{r}{q}\right) = \sum_{k=0}^{n} \overset{\in\mathbb{Z}}{a_k} \left(\frac{r}{q}\right)^k = \frac{m}{q^n}, \quad m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$$

$$\left|P\left(\frac{r}{q}\right)\right| \ge \frac{1}{q^n}$$

$$\left|P\left(\frac{r}{q}\right)\right| = \left|P\left(\frac{r}{q}\right) - \overbrace{P(\alpha)}^{=0}\right|$$

Lagrange
$$= \left|P'(x)\left(\frac{r}{q} - \alpha\right)\right|$$

$$\le M\left|\frac{r}{q} - \alpha\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \geq \frac{\Gamma^{-1}}{q^n} \qquad (c=\Gamma^{-1})$$

$\square$

Série VI: Jinak VI.1 – důkaz

VI.3.

VI.4 nebo VI.5

---

ad VI.1: $$[0,1) = \underbrace{\bigcup_{j=0}^{N-1} \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right)}_{N \text{ úseků délky } < \frac{1}{N}}$$

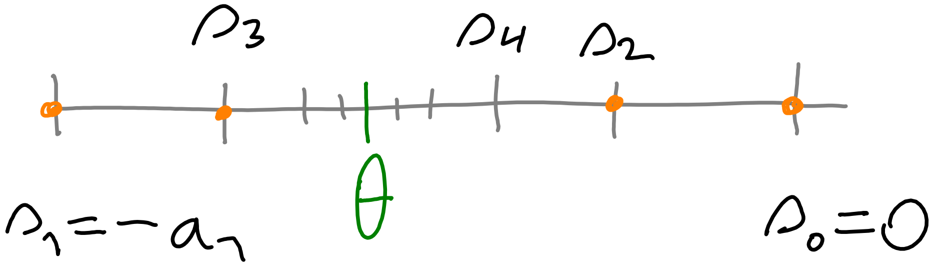
$$j\alpha = \underset{\mathbb{Z}}{\lfloor j\alpha \rfloor} + \underset{[0,1)}{r_j}, \quad \underbrace{j = 0, 1, \dots N-1}_{N+1 \text{ čísel}}$$

$$\Rightarrow \exists\, j \neq \tilde{j} \text{ t.ž. } |r_j - \tilde{r}_j| < \frac{1}{N}$$

$$\underbrace{(j-\tilde{j})\alpha}_{q \,\in\, \{1, \dots N\}} = \underset{\mathbb{Z}}{p} + \underbrace{r}_{|\cdot| < \frac{1}{N}}$$

ad VI.3 $\quad \theta = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$, $b_k = \frac{1}{2^{k!}} \searrow 0$

blesk!!



$$\Rightarrow \quad 0 < |\theta - s_n| < b_{n+1}$$

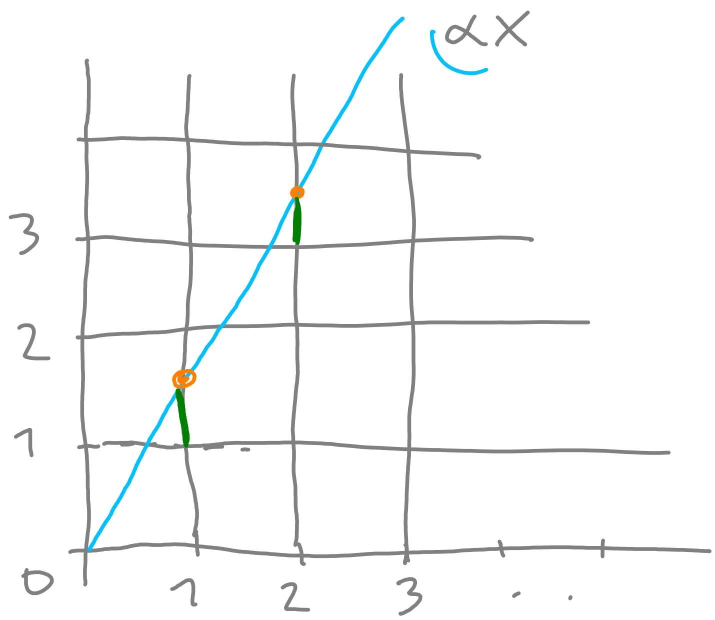
pro $\forall n \in \mathbb{N}$

iracionalita: podobně jako e – minule

transcendence: SPOR s Tvrzení VI.2 (Liouville)

Pozn. viz Jarník, D2, s. 73–74.

*ad VI.6)



$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha q - p = r$

$p, q \in \mathbb{Z}$ $(q > 0)$

Označ: $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$

$$\alpha q = p + r$$

$$p = \lfloor \alpha q \rfloor, \quad r = \{\alpha q\}$$

Problém: chování posloupnosti

$$n \longmapsto \{\alpha n\} \in [0,1)$$

iracionální ?

Cvičení: $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$

Dirichl. věta $\Longrightarrow$ hromadné body $= [-1,1]$.