10.5.

Téma: funkce více proměnných
(a ODR)

Def. Funkce $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazve spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon\right]$$

Ekvivalentně: $F(\mathcal{U}(x_0, \delta)) \subset \mathcal{U}(F(x_0), \varepsilon)$.

Značení. $\mathcal{U}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_0\| < \delta\}$

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Tvrzení VII.1 [spojitost superpozice]

nechť: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojité v $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

nechť $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ je spojité v $y_0 = F(x_0)$.

Pak $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ je spojité v x_0.

Dk. cíl $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: G\circ F(\mathcal{U}(x_0,\delta))$

$$\subset \mathcal{U}((G\circ F)(x_0),\varepsilon).$$

$\varepsilon>0$ dáno: $\exists \eta>0$ t.ž. $G(\mathcal{U}(y_0),\eta)$
(spojitost G)

$$\subset \mathcal{U}(G(y_0),\varepsilon)$$

$\exists \delta>0$ t.ž. $F(\mathcal{U}(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}(F(x_0),\eta)$
(spojitost F)

$$\Rightarrow (G\circ F)(\mathcal{U}(x_0,\delta)) = G(\underbrace{F(\mathcal{U}(x_0,\delta))})$$

$$\subset \underbrace{G(\mathcal{U}(\underbrace{F(x_0)}_{y_0},\eta))}$$

$$\subset \mathcal{U}(\underbrace{G(y_0)}_{\shortparallel},\varepsilon)$$

$$(G\circ F)(x_0)$$

$\boxed{}$

VII.2. $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spojitá v bodě x_0

$\Rightarrow \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$
$x\longmapsto (x,y(x))$ spojité v x_0.

Pozn. platí spojitost po složkách?

$$x \longmapsto F(x)$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x) \in \mathbb{R}^m$$

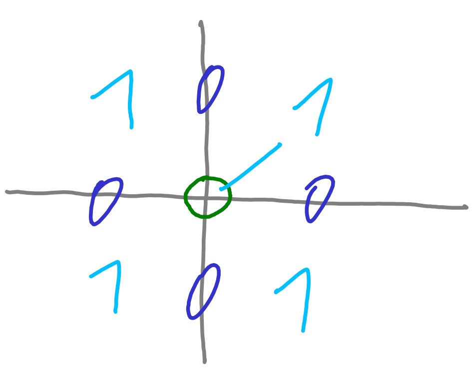
ANO: v oboru hodnot, ve smyslu:

$F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojité $\iff$ $F_j:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou spojité pro $\forall j = 1,\dots,m$

$$\big(F = (F_1, F_2, \dots, F_m)\big)$$

NE: v proměnné:

Příkl. $G:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $G(x,y) = \begin{cases} 0 & y=0 \text{ nebo } x=0 \\ 1 & \text{jinde} \end{cases}$



vidím: G není spojité v počátku

ale: $G(x,y)$ je zvlášť spojité podle obou souřadnic x, y.

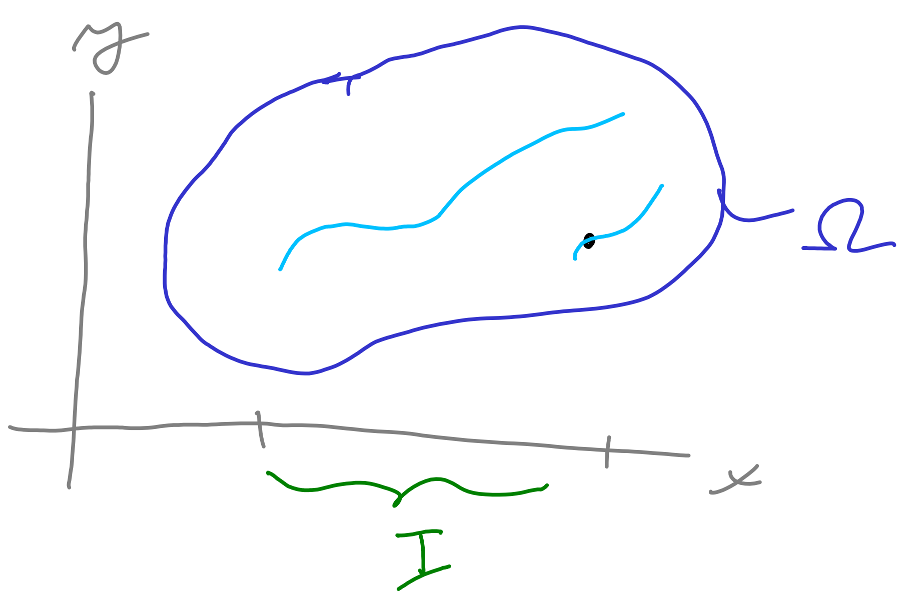
Téma: ODR 1. řádu

$$\boxed{y' = f(x,y)} \quad (1)$$

neznámé funkce $y = y(x)$

Def. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřené, nechť $f: \Omega \to \mathbb{R}$ je spojité. Řešením rce (1) v Ω rozumíme funkci $y: I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, splňující pro $\forall x \in I$:

1. $(x, y(x)) \in \Omega$
2. $\exists$ vlastní $y'(x)$
3. $y'(x) = f(x, y(x))$.



Pozn. nutně $y \in C^1(I)$ „klasické řešení"

$\Leftrightarrow$ y, y' ... spojité v I

---

ad VII.5 $\qquad y' = f(x,y)$ ... speciální případ

$$y' = g(x)$$

ad I.5* $\qquad y$ spojité v (a,b)

$$y'_+(x) = g(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

g spojité $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $y'(x) = g(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Dk.: $\quad Y(x) := y(x) - G(x)$, kde $G(x)$ je primitivní fce k $g(x)$

$$Y'_+(x) = y'_+(x) - G'_+(x) \qquad (\exists \text{ díky R.i.})$$

$$= g(x) - g(x) = 0$$

$\Longrightarrow$ $Y(x) \equiv c$, tj. $y(x) = G(x) + c$

$\Rightarrow$ $y' = G' = g$ $\qquad \blacksquare$

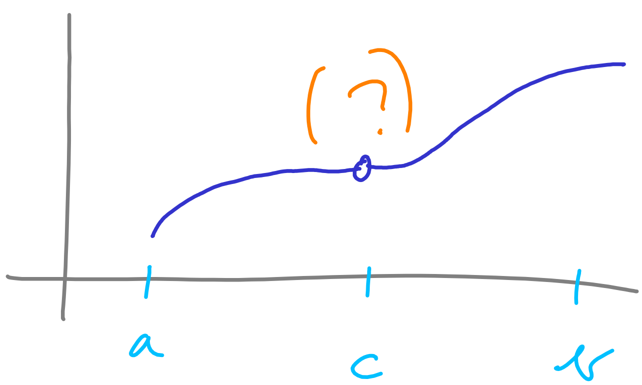
Tvrzení VII.3 [princip lepení.]

Je dáno $y:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$.

Nechť: 1. y řeší rci (1) $y'=f(t,y)$ v (a,c) i v (c,b)

2. y spojité v c, f spojité v $(c,y(c))\in\mathbb{R}^2$

Pak: y řeší (1) na celém (a,b).



Dk. stačí ukázat splnění (1) v bodě $t=c$

tj.: $y'(c)=f(c,y(c))$.

BÚNO: $y'_+(c) = \lim\limits_{x\to c+} y'(x) =$

Věta 4.11 (ZS)

pokud existuje!!

nezlobí na (c,b)

$$= \lim_{x \to c+} f(x, y(x)) = f(c, y(c))$$

spojitost fce

$$x \mapsto f(x, y(x))$$

složení spojitých fcí

i) $x \mapsto (x, y(x))$

ii) f