24.5.

Tvrzení VIII.6 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřené, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ spojité, $I \subset \mathbb{R}$ interval.

Nechť $y_1 : I \to \mathbb{R}$ splňuje $y_1' \overset{(1)}{\leq} f(x, y_1)$ v I;

nechť $y_2 : I \to \mathbb{R}$ splňuje $y_2' = f(t, y_2)$ v I.

Nechť $\exists\, x_0 \in I$ s.ž. $y_1(x_0) \overset{(1)}{\leq} y_2(x_0)$.

Potom: $y_1(x) \overset{(2)}{<} y_2(x)$ pro $\forall x \in I, x > x_0$

Příkl.

$$y_1' = y_1 + \underbrace{\cos x \cdot \sin x}_{=\ \frac{1}{2}\sin 2x\ \leq\ \frac{1}{2}\ <\ 1}$$

$$y_1(0) = 0$$

$\Rightarrow$ y_1 splní dif. nerovni $\boxed{y_1' < y_1 + 1}$

$\overset{(\text{VIII. }6)}{\Rightarrow}$ $y_1(x) < y_2(x)$, pro $\forall x > 0$,

kde y_2 splní $y_2' = y_2 + 1$

$\Rightarrow$ $y_2(x) = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

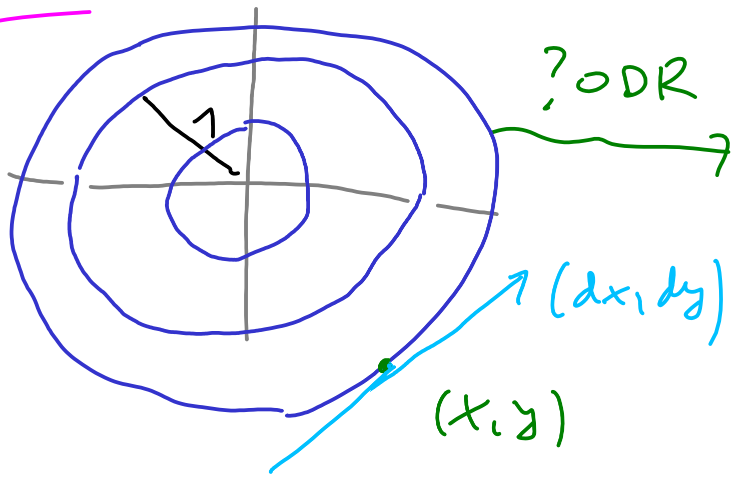
$\Rightarrow$ $\boxed{y_1(x) < e^x - 1}$, $\forall x > 0$.

Problém *5.3 Lze psát $\leq$ místo $<$?

(2) ANO (1) **NE** (jednoznačnost !!)

VIII.8 aneb geometrický pohled na ODR.

Pozn.:



$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$$

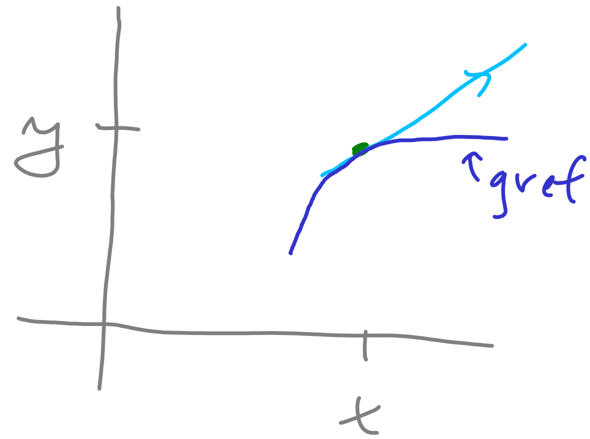
$x \in (-1,1)$

Jinak: $x^2 + y^2 = c^2 \quad |$

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

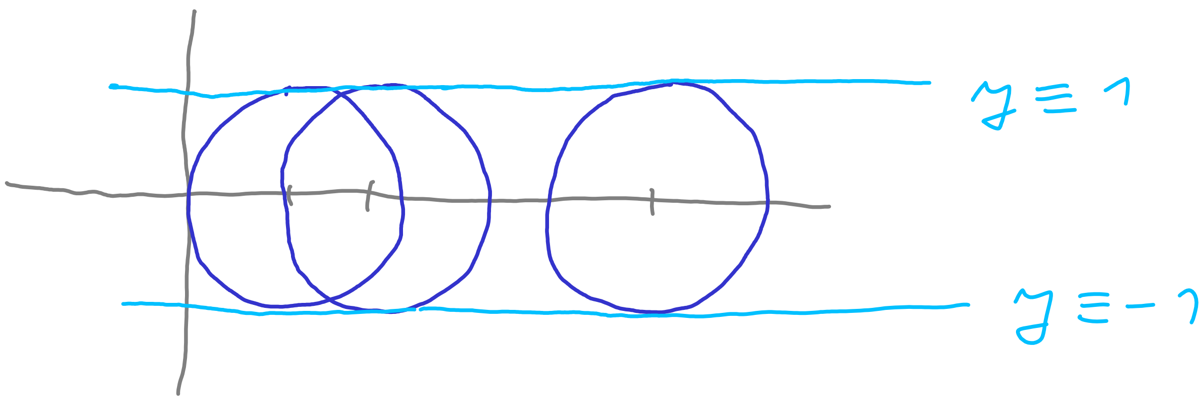
$$\underline{(x,y)} \perp \underbrace{(dx,dy)}_{\text{tečný vektor}}$$

Pozn. $y' = f(t,y)$



Příkl. $\{\gamma_c\}$ -- kružnice poloměru 1 se středem na ose x

$$(x-c)^2+y^2=1, \quad c\in\mathbb{R}$$



Obálky: $y = \pm 1$

Vzoreček pro obálku:

$$\boxed{\begin{aligned} F(x,y,c)&=0 \\ \frac{\partial F}{\partial c}(x,y,c)&=0 \end{aligned}}$$

kde $F(x,y,c)=0$ popisuje $\{\gamma_c\}$

aplikace:

$$\left| \begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 1 \\ 2(x-c) &= 0 \end{aligned} \right| \quad \Big| \frac{\partial}{\partial c}$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = 1 \quad \text{tj.} \quad y = \pm 1$$

VIII.9 [Clairautova rovnice]

$$y = xy' + f(y'), \quad \text{kde } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

úlohy 1. $y = cx + d \quad \dots \quad c, d \in \mathbb{R}$

tzv. obecné řešení

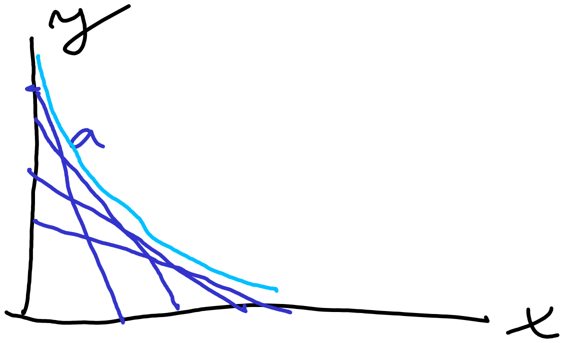
$\Rightarrow \{\gamma_c\}$

2. obálka: řešení původní rovnice

tzv. singulární řešení

Obrázky!

Ad 3:



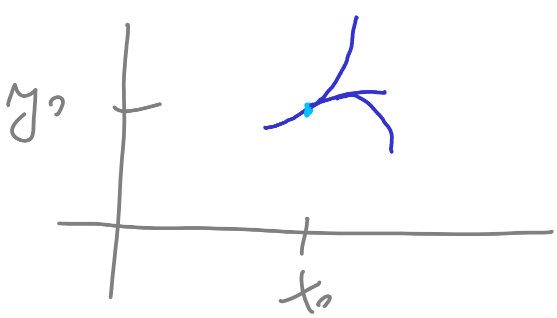
Pozn. ad jednoznačnost řešení

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ spojité

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřené

$\Rightarrow$ $\exists$ lokální řešení, obecně ne jediné



(globální)

Def. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve lipschitzovské vůči y, jestliže: $\exists\, L > 0$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

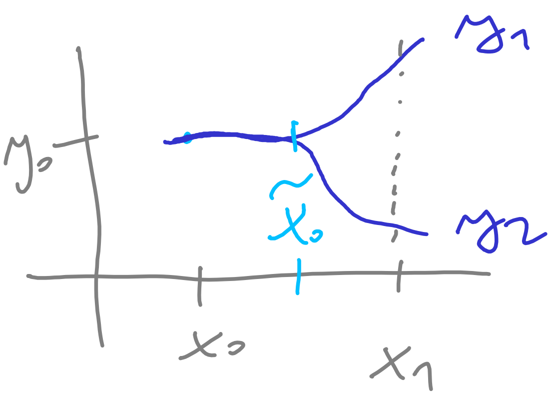
$\forall (t,y_1), (t,y_2) \in \Omega$

Tvrzení: f lipschitzovské vůči y

$\Rightarrow$ jednoznačnost řešení.

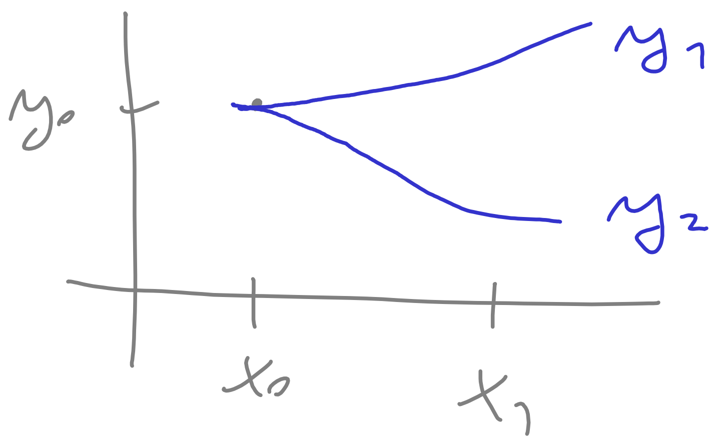
Dk. ?? $\exists\, y_1, y_2$ řešení $(*)$ t.ž.

$\exists\, x_1 > x_0$ t.ž. $y_1(x_1) \neq y_2(x_2)$



BÚNO: $y_1(x) \neq y_2(x)$

$\forall x \in (x_0, x_1]$



pomocné veličiny: $u(x) := |y_1(x) - y_2(x)|$

$u_+'(x) \leq |y_1'(x) - y_2'(x)| =$

viz: I.6, $f = y_1 - y_2$

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|$$

$$\leq L\,|y_1(x) - y_2(x)|$$

$$\Rightarrow \quad u'_+(x) \leq L\,u(x), \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

(dokončení příště)