# Cvičení 1, Helmholtzův rozklad

3. října 2022

**Příklad 1.**
Uvažujte následující vektory rychlosti:

$$\mathbf{u}_1 = (y, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (-y, x, 0), \mathbf{u}_3 = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

Nakreslete pole těchto rychlostí a vypočítejte jejich rotaci. V jakém smyslu platí tvrzení, že v rotující tekutině je rotace rychlosti nenulová?

**Příklad 2.**
Uvažujte vektorová pole z příkladu 1.
a) Jsou tato pole divergentní?
b) Pokud platí, že rotace zadaného vektorového pole na $\mathbb{R}^3$ je identicky nulová, tušíme něco o jeho divergenci? (Uvažte Helmholtzův rozklad.)

**Příklad 3.**
Pro pole rychlosti $\mathbf{u} = (-y, x, 0)$ nalezněte libovolný skalární a vektorový potenciál $\phi$ a $\mathbf{A}$ tak, že

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \tag{1}$$

uvnitř omezené podoblasti $\mathbb{R}^3$.

**Příklad 4.**
Dokažte, že na omezené oblasti $\Omega$ pro hladkou funkci $\mathbf{u}$ existují skalární funkce $\phi$ a vektorová funkce $\mathbf{A}$ tak, že platí

$$u = \nabla\phi + \nabla \times A, \tag{2}$$

kde

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\,\mathrm{d}s', \tag{3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\,\mathrm{d}v' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')\times\mathbf{n}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\,\mathrm{d}s'. \tag{4}$$

Využijte toho, že na základě znalosti fundamentálního řešení Laplaceovy rovnice (řešení rovnice $\Delta\mathbf{u} = \delta$ ve smyslu distribucí) a na základě vektorové identity pro rotaci rotace je možné psát

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_\Omega \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}' = \int_\Omega \Delta_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\right)\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}' = -\Delta_{\mathbf{r}}\int_\Omega \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}' \\ = -\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{f}) = \nabla\phi + \nabla\times\mathbf{A}\end{aligned}$$

pro

$$\mathbf{f} = \int_\Omega \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\mathbf{u}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}'.$$