Cvičení 3, Dynamika tekutin

17. října 2022

Příklad 1.
Inerční oscilace je speciální typ pohybu vzduchu v atmosféře, ve kterém je setrvačnost tekutiny zcela vyvážena Coriolisovou sílou.
a) Takové proudění je v eulerovském popisu určeno rovnicemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0,$$

kde f je Coriolisův parametr, v tomto případě považovaný za konstantní. Určete periodu oscilací.
b) Lagrangeovsky se dá (mimo rovníkovou oblast) psát rovnice pro pohyb vzduchové částice

$$-K_H|\mathbf{u}|\mathbf{u} \times \mathbf{k} = f\mathbf{u} \times \mathbf{k},$$

kde K_H je horizontální křivost pohybu a $\mathbf{k}$ vektor mířící vzhůru ve směru osy z, popisující rovnost odstředivé síly vznikající v důsledku horizontálního zakřivení proudnic a Coriolisovy síly. Jak vypadá tento pohyb ve středních zeměpisných šířkách ($f \approx 10^{-4}$ s^{-1}) s rychlostí proudění 10 m/s, pokud se Coriolisův parametr nemění? Jak se trajektorie změní, když budeme uvažovat závislost Coriolisova parametru na zeměpisné šířce $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ (Ω je úhlová frekvence otáčení Země)?

Příklad 2.
Napětí v newtonovské (Navierově-Stokesově) tekutině je možné popsat pomocí vztahu

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

kde $\mathbb{D}$ je tenzor rychlosti deformace definovaný jako $\mathbb{D} = (D_{ij})_{i,j=1,2,3}$, $D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Ukažte, že v případě jednoduchého smykového pole $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$ jsou všechny diagonální členy tenzoru napětí $\mathbb{T}$ stejné. Uvažujte dále Stokesovu tekutinu, ve které místo předchozího vztahu platí

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \alpha_1\mathbb{D} + \alpha_2\mathbb{D}^2.$$

Jak vyjde tenzor $\mathbb{T}$ tentokrát? Jaké to může mít důsledky na pohyb tekutiny? (Pohybové rovnice v této formulaci je možné psát ve tvaru $\rho\,\mathrm{d}\mathbf{u}/\,\mathrm{d}t = \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho\mathbf{b}$, kde $\mathbf{b}$ je případná vnější síla.)

Příklad 3.
Uvažujte dvourozměrné proudění popsané lagrangeovsky rovnicemi

$$x = Xe^{-at}, y = Y + bt,$$

kde X a Y určují počáteční polohu částic a a a b jsou kladné konstanty. Ověřte, že lagrangeovské a eulerovské zrychlení se shodují.