Cvičení 4, Cirkulace a vorticita

31. října 2022

Příklad 1.
Uvažujte křivku $C(t)$ danou částicemi tekutiny

$$\mathbf{x} = (a\cos s + a\alpha t \sin s, a \sin s, 0), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Přímým výpočtem ukažte, že cirkulace

$$\Gamma = \int_{C(t)} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \, \mathrm{d}s$$

nezávisí na čase. Proč?

Příklad 2.
K proudění v předchozím příkladu vypočítejte vorticitu. Pro čas $t = 0$ vorticitu zintegrujte přes plochu určenou křivkou $C(t)$. Proč vychází právě takto? Jak se bude vyvýjet plocha uzavřená křivkou $C(t)$ pro čas $t > 0$.

Příklad 3.
Pro následující proudové funkce nalezněte pole rychlostí. Ověřte, že se jedná o potenciálové proudění.

$$\psi_1 = Axy, \quad \psi_2 = A(x^2 - y^2).$$

Příklad 4.
Pro následující pole rychlosti nalezněte proudovou funkci a vorticitu:

a) Couettovo proudění - proudění mezi dvěma nekonečně dlouhými horizontálními deskami o vzdálenosti h, z nichž jedna se pohybuje s rychlostí U a jedna je stacionární. Couettovo proudění má rychlost

$$u = U\frac{y}{h}, \quad v = 0.$$

b) Pole rychlosti

$$u = A(x^2 - y^2), \quad v = -2Axy,$$

kde A je konstanta.