Cvičení 7, Hamiltonovská mechanika

21. listopadu 2022

Příklad 1.
Uvažujte Poissonovu závorku (bilineární zobrazení z $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, kde $\mathcal{F}(M)$ je prostor funkcí na varietě M) definovanou pomocí vztahu

$$\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{x})\} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right)^T L \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}\right)$$

s takzvaným Poissonovým bivektorem zavedeným vztahem

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že pro $\mathbf{x} = (q, p)$ má Poissonova závorka tvar

$$\{F, G\} = \partial_q F \partial_p G - \partial_p F \partial_q G.$$

b) Ukažte, že zápis pohybových rovnic $\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H\}$ s $\mathbf{x} = (q, p)$ je ekvivalentní zápisu Hamiltonových kanonických rovnic

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

c) Napište pohybové rovnice pro pohyb volné částice ve vnějším poli, který je popsán Hamiltoniánem $H = p^2/2m + V(q)$.

Příklad 2.
Pro pohyb tuhého tělesa je možné odvodit, že Poissonovy závorky jsou definovány pomocí Poissonova bivektoru se složkami $L^{ij} = -m_k \varepsilon_{kij}$, kde m_i jsou složky momentu hybnosti a ε_{ijk} je Levi-Civitův symbol.
a) Hamiltonián v tomto případě je možné vyjádřit jako

$$H(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{I_1} + \frac{m_2^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3}\right).$$

Odvoďte, jak vypadají pohybové rovnice pro vývoj momentu hybnosti.
b) Rozhodněte, jestli se funkce $|\mathbf{m}|^2$ zachovává.

Příklad 3.
V případě popisu tekutiny je vektor $\mathbf{x}$ nekonečnědimenzionální, jedná se o funkci, a místo funkcí závislých na $\mathbf{x}$ v rovnicích vystupují funkcionály. V rovnicích místo derivací tedy vystupuje tzv. funkcionální derivace $\delta F/\delta f$ definovaná jako

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} F\left[f + \epsilon \delta f\right] = \int \frac{\delta F}{\delta f(x)} \delta f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Vypočítejte tuto derivaci pro následující funkcionály:

$$
\begin{aligned}
F_1[f] &= \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x, \\
F_2[f] &= f(r_0), \\
F_3[f] &= \int \frac{1}{2}(\nabla f)^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$