

VÝSLEDKY PŘÍKLADŮ NA PROCVIČENÍ Z NMSA202  
POSLEDNÍ ZMĚNA (OPRAVA): 2. ČERVNA 2020

1 KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

1.  $\frac{2}{5}$
2.  $\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$
3.  $\frac{8!3!}{10!} = \frac{1}{15}$
4. (a)  $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k! = 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k/k!$ ;  
(b)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k/k! \rightarrow e^{-1} = 1/e$  pro  $n \rightarrow \infty$
5. (a)  $\left(\frac{6}{7}\right)^n$   
(b)  $\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}5^{n-5}}{7^n}$   
(c)  $\sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \binom{7}{i} \left(\frac{7-i}{7}\right)^n$
6. (a)  $\frac{m}{n+m}$ ; (b)  $\frac{\binom{K}{k}\binom{n+m-K}{m-k}}{\binom{n+m}{m}}$  pokud  $m \geq k$ ,  $n \geq K - k$ ,  $K \geq k$ , jinak 0; (c)  $\frac{\binom{n+m-k}{m-k}}{\binom{n+m}{m}}$ .

2 NEZÁVISLOST, PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST, ÚPLNÁ  
PRAVDĚPODOBNOST, BAYESŮV VZOREC

1. jevy jsou závislé
2. (a) neplatí,  $A^C$  a  $B^C$  jsou nezávislé,  
(b) platí  
(c) neplatí  
(d) platí  
(e) neplatí
3. profesor:  $\frac{3^3}{4^4 - 3^4} = \frac{27}{175}$
4. studenti: (a) 28/45 (b) ze skupiny B (c)  $1 - (0,2)^3(0,4)^4(0,6)^2$
5. krabice s míčky:  $528/5915 = 0,089$
6. HUMOR: 5/11
7. mince:  $\frac{1}{(e-1)(k+1)!}$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots$
8. obrazy: (a) 0,977 (b) 0,64
9. HIV test: (a) 0,77, (b)  $10^{-5}$ , (c) 0,999
10. kostky: (a)  $P(\text{"6"}) = 7/72$ ,  $P(\text{"11"}) = 1/24$ ,  
(b) 4/7  
(c)  $P(\text{"6"}|\text{chlapec}) = 5/54$ ,  $P(\text{"6"}|\text{dívka}) = 19/180$ ,  $P(\text{"6"}) = 157/1620$

### 3 NÁHODNÁ VELIČINA — DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ

1. (a)  $P(X = 0) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $P(X = 1) = \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $P(X = 2) = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ ;  
 (b)  $P_X(B) = \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_0(B) + (\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}) \delta_1(B) + (1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) \delta_2(B)$ , pro  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
2.  $c = 1/14$ ,  $EX = \frac{18}{7}$ ,  $\text{var } X = \frac{19}{49}$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ \frac{1}{14} & x \in [1, 2), \\ \frac{5}{14} & x \in [2, 3), \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

$$P(X \geq 2) = \frac{13}{14}.$$

Rozdělení  $Y$ :  $P(Y = 0) = 4/14 = 2/7$  a  $P(Y = 1) = 1/14 + 9/14 = 10/14 = 5/7$ , tj.  $Y$  má alternativní rozdělení  $\text{Alt}(p)$  s parametrem  $p = 5/7$ ;  $EY = \frac{5}{7}$

3.  $a = 1/4$ ,  $EX = 5/12$ ,  $\text{var } X = 155/144$ , rozdělení  $Y$ :  $P(Y = 0) = 1/2$ ,  $P(Y = 1) = P(Y = 4) = 1/4$ ,  $EY = 5/4$
4. basketbalista:  $P(X = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n$  pro  $n = 0, 1, 2, \dots$
5. kostky:  $1/3$
6. (a)  $EN = 7/2$ ,  $\text{var } N = 35/12$   
 (b)

$$P(N = i | \text{součet je } 5) = \begin{cases} \frac{1296}{2401}, & i = 1, \\ \frac{864}{2401}, & i = 2, \\ \frac{216}{2401}, & i = 3, \\ \frac{24}{2401}, & i = 4, \\ \frac{1}{2401}, & i = 5, \\ 0, & i = 6. \end{cases}$$

(c)

$$P(N = i | \text{právě 4 šestky}) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3 \\ \frac{12}{187}, & i = 4, \\ \frac{50}{187}, & i = 5, \\ \frac{125}{187}, & i = 6. \end{cases}$$

7. Adam a Bedřich: (a)  $(\frac{13}{18})^{k-1} \frac{1}{9}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; (b)  $\frac{2}{5}$ ; (c)  $\frac{18}{5}$ .
8. A a B: (a)  $(\frac{5}{6})^{k-1} (\frac{4}{6})^{k-1} \frac{1}{6}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; (b)  $\frac{3}{8}$ ;  
 (c)  $P(\text{B hodí } k\text{-krát}) = (\frac{5}{6})^k (\frac{4}{6})^k \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^k (\frac{4}{6})^{k-1} \frac{2}{6}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  a  $P(\text{B hodí } 0\text{-krát}) = \frac{1}{6}$ ;  
 (d)  $E(\text{počtu hodů}) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) (\frac{5}{6})^{k-1} (\frac{4}{6})^{k-1} \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k) (\frac{5}{6})^k (\frac{4}{6})^{k-1} \frac{2}{6} = \dots = \frac{33}{8}$ .
9. Počet přestupků má Poissonovo rozdělení s parametrem  $p\lambda$ .

## 4 NÁHODNÁ VELIČINA — SPOJITÉ ROZDĚLENÍ

1. (a) Distr. funkce  $X$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2, & x \in (0, 1), \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Pravděpodobnostní míra  $P_X$

$$P_X(B) = \int_{B \cap (0,1)} 2x \, dx, \quad \text{pro } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(b) Medián  $X$  je  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2.  $c = 1/(e - 1)$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{e^x - 1}{e - 1}, & x \in [0, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{E} X = \frac{1}{e-1}, \quad \text{var } X = \frac{e^2 - 3e + 1}{(e-1)^2}$$

3. Medián  $X$  je  $\log(\frac{e}{2} + \frac{1}{2})$  a medián  $e^X$  je  $\frac{e}{2} + \frac{1}{2}$ .  
 4.  $c = \frac{1}{2 \log((k+1)/k)}$ ,  $\mathbb{E} X = 0 =$  medián  $X$  (plyne ihned ze symetrie hustoty),  
 $\text{var}(X) = c(2k + 1) = \frac{2k+1}{2 \log((k+1)/k)}$   
 5. (a)  $Y$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0, 1]$ ,  
 (b)  $\mathbb{E} Z = 3/2$ ,  $\text{var}(Z) = 3/4$   
 6. (a) distr. funkce  $Y$ :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \sqrt{y}/\pi, & y \in [0, \pi^2], \\ 1 & y > \pi^2 \end{cases}$$

hustota:  $g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}} \mathbb{I}\{y \in (0, \pi^2)\}$ ,  $\mathbb{E} Y = \pi^2/3$ .

(b) distribuční funkce  $Z$ :

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{2 \arcsin(z)}{\pi}, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$

hustota  $h(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}} \mathbb{I}\{z \in (0, 1)\}$ .  $\mathbb{E} Z = 2/\pi$

(c) distribuční funkce  $W = \max\{X, Y\}$ :

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0, \\ \frac{w}{\pi}, & 0 \leq w \leq 1, \\ \frac{\sqrt{w}}{\pi}, & 1 < w \leq \pi^2, \\ 1, & w > \pi^2 \end{cases}$$

hustota  $f_W(z) = \frac{1}{\pi} \mathbb{I}\{w \in (0, 1)\} + \frac{1}{2\pi\sqrt{w}} \mathbb{I}\{w \in (1, \pi^2)\}$

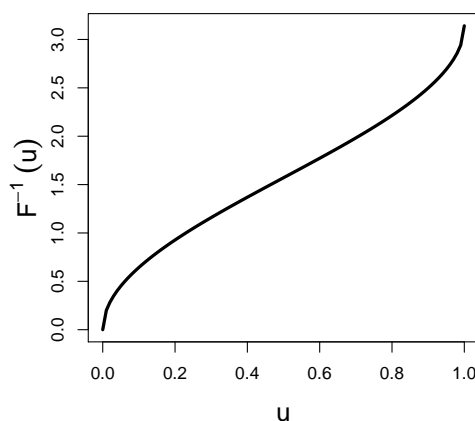
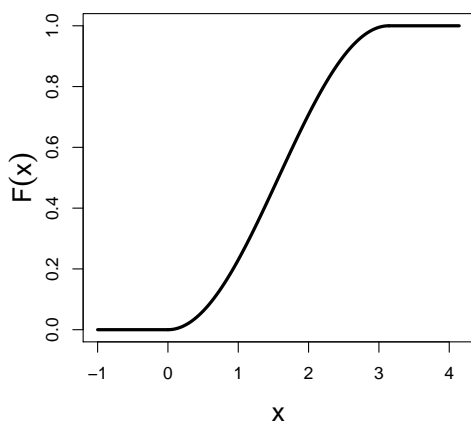
7. (a)  $c = 1/2$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

(b)  $E X = \pi/2 =$  medián  $X$  (plyne ihned ze symetrie hustoty)

(c)  $F^{-1}(u) = \arccos(1 - 2u)$ ,  $u \in (0, 1)$

(d) rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(0, 2)$



8. trojúhelník:

(a) 0

(b) rozdělení je rovnoměrné na intervalu  $(0, \pi/2)$ ; hledaná pravděpodobnost je  $1/3$

(c) distribuční funkce a hustota:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y, & y \in (0, 1), \\ 1, & y \geq 1, \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$P(a > 1/2) = 2/3$$

$$(d) E a = \frac{2}{\pi}, \quad \text{var}(a) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2},$$

$$(e) E V = \frac{1}{2\pi}.$$

## 5 NÁHODNÉ VEKTORY

1. hody mincí

(a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
X	0	0	1/8	1/8
	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

- (b) marginální rozdělení:  $P(X = 0) = 1/4$ ,  $P(X = 1) = 1/2$ ,  $P(X = 2) = 1/4$ , totéž pro  $Y$ , veličiny jsou závislé  
 (c)  $\text{cov}(X, Y) = -1/4$ ,  $\rho_{XY} = -1/2$

2. (a)  $c = 4$ ,  
 (b)  $f_X(x) = 2xe^{-x^2} \mathbb{I}\{x \geq 0\}$ ,  $f_Y(y) = 2ye^{-y^2} \mathbb{I}\{y \geq 0\}$ ,  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé  
 (c)  $E(X^2 + Y^2) = 2$
3.  $c = 1/\pi$ ,  $f_X(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \mathbb{I}\{x \in (-1, 1)\} = f_Y(x)$ , veličiny nejsou nezávislé.
4. (a) hustota  $f(z) = (1 - |z|) \mathbb{I}\{z \in (-1, 1)\}$ ,  $E Z = 0$ ,  $\text{var}(Z) = 1/6$ ; (b)  $E(ZW) = 0$ .
5.  $X + Y$  má binomické rozdělení  $\text{Bi}(m + n, p)$
6. (a)  $\frac{3}{2}$  (b) Nejsou nezávislé. (c)  $\frac{1}{2}$  (d)  $\frac{3}{2}$ .
7. maximum a minimum:  
 (a)  $F_U(u) = [F(u)]^n$ ,  $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1}f(u)$   
 (b)  $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$ ,  $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1}f(v)$   
 (c)  $E U = n/(n + 1)$ ,  $\text{var}(U) = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$ ,  $E V = 1/(n + 1)$ ,  
 $\text{var}(V) = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$
8.  $\text{cov}(H, D) = 1/36$ , jsou závislé
9. vlak a autobus:  
 (a) hustota a distribuční funkce  $Z = A + V$ : Je-li  $\lambda \neq \mu$ , pak

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}), & z > 0, \\ 0 & z \leq 0, \end{cases} \quad G(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda e^{-\mu z} \mu e^{-\lambda z}}{\lambda - \mu}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

Je-li  $\lambda = \mu$ , pak

$$g(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z > 0, \\ 0 & z \leq 0, \end{cases} \quad G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

- (b)  $E Z = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$ ,  $\text{var}(Z) = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2}$ ,  
 (c) rozdělení  $W = V - A$ :

$$G(w) = \begin{cases} 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda w}, & w > 0, \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{\mu w}, & w \leq 0. \end{cases} \quad g(w) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda w}, & w > 0, \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu w}, & w < 0, \end{cases}$$

$$P(V - A > k) = 1 - G(k), \quad P(V - A = k) = 0.$$

(d)  $P(V > kA) = \frac{\mu}{\lambda k + \mu}$

10. Jsou závislé.

## 6 LIMITNÍ VĚTY

1. (a) 0  
 (b) ano  
 (c) ano  
 (d) ne

2. rovnoměrné rozdělení na  $[0, 1]$ :
  - (a) plyne z rozdělení  $Y_n$  jakožto minima
  - (b) ano, použijte Cantelliho větu
  - (c) ano,  $c = 1$
  - (d) s pravděpodobností 1
  - (e) s pravděpodobností 1
3. Použijte např. Markovovu nerovnost pro  $r = 2$ .
4. (a) konvergence v  $P$  plyne snadno, konvergence s.j. neplatí (Borelova věta)  
(b) konverguje k 0
5. Plyne přímo z definice a rozdělení  $X_n$ .
6. plyne z 0-1 zákonů (Borelova věta) a z nerovnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n) - 1 \leq \mathbb{E}|X| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n),$$

která platí pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  (např. viz Lemma 4.7 ve skriptech)

7. (a) 0; (b) 0; (c) 1; (d) 0.
8. (a) plyne ze SZVČ pro nezávislé nestejně rozdělené náhodné veličiny; (b) Je splněna Ljapunovova podmínka. (b) Plyne z definice konvergence v pravděpodobnosti.
9. (a)  $\mathbb{E} X = m + 1$ ,  $\text{var}(X) = m + 1$ ,
10. bankomat: alespoň 10 230 tisícikorunových bankovek
11. kostka: 0,921
12. hostina: nejvýše 45 hostů
13. konzultace: 0,013
14. a) 0,858 b) 2 044 960 c) 22 337
15. terč: 0,993075

## 7 BODOVÝ ODHAD

1. (a) Je třeba ukázat, že věrohodnost je maximalizována v bodě  $\hat{a} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .  
(d)  $V_n = \frac{n+1}{n} U_n = \frac{n+1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$  je nestranný odhad parametru  $a$ ,  
 $V_n$  je konzistentní odhad parametru  $a$ .  
(e)  $T_n$  je nestranný i konzistentní odhad parametru  $a$ .  
(f)  $\text{var}(V_n) = \frac{a^2}{n(n+2)}$ ,  $\text{var}(T_n) = \frac{a^2}{3n}$ .  
(g) Odhad  $V_n$  má menší rozptyl.
2. (a) Maximálně věrohodný odhad je  $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i)$ . Odhad je nestranný a konzistentní odhad parametru  $\mu$ .  
(b) Momentovým odhadem je  $\tilde{\mu}_n = \log(\bar{X}_n) - \frac{1}{2}$ . Tento odhad je konzistentní.
3.  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  není nestranný ani konzistentní odhad parametru  $\mu$ . Nicméně  $\bar{X}_n$  je nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce  $\mathbb{E} X_1 = \exp\{\mu + \frac{1}{2}\}$ .
4. Maximálně věrohodný odhad parametru  $\sigma^2$  je  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ . Tento odhad je nestranný i konzistentní.

5. Výběrový rozptyl je nestranný i konzistentní odhad parametru  $\sigma^2$ . V případě známého  $\mu_0$  má však o něco větší rozptyl než maximálně věrohodný odhad  $\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ . Zatímco  $\text{var}(\widehat{\sigma}_n^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$ , je  $\text{var}(S_n^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ .
6. (a) Maximálně věrohodný odhad parametru  $p$  je  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .  
 (b)  $\hat{p}_n$  není nestranný, ale je konzistentní odhad parametru  $p$ .  
 (c)  $\tilde{p}_n$  je nestranný, ale není konzistentní odhad parametru  $p$ .
7. Odhad není nestranný, ale je konzistentní.
8. (a) Maximálně věrohodný odhad parametru  $\theta$  je  $\hat{\theta}_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ . Odhad není nestranný, ale je konzistentní.  
 (b) Momentový odhad parametru  $\theta$  je  $\tilde{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{2}$ . Odhad je nestranný i konzistentní.
9. Maximálně věrohodný odhad parametru  $\theta$  je  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ . Odhad není nestranný, ale je konzistentní.

## 8 INTERVALOVÝ ODHAD

1. Označme  $X_i$  výšku  $i$ -tého chlapce,  $i = 1, \dots, 15$ .  
 Model:  $X_1, \dots, X_{15}$  nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $N(\mu, 39, 112)$ .  
 (a)  $(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (134,97; 143,29)$   
 (b)  $(\bar{X}_n - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty) = (135,37; +\infty)$   
 (c)  $(-\infty; \bar{X}_n - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (-\infty; 142,89)$
2. (a)  $(\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}) = (13,94; 14,67)$   
 (b)  $(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}; \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}) = (0,164; 0,943)$
3. (a) Předpokládaný model: Nechť  $X_i$  je indikátor toho, zda  $i$ -tá osoba souhlasí. Předpokládáme, že  $X_1, \dots, X_{400}$  jsou nezávislé a stejně rozdělené s alternativním (tj. nula-jedničkovým) rozdělením s neznámým parametrem  $p \in (0, 1)$ .  
 Bodový odhad je  $\hat{p} = 0,6$ .  
 (b)  $(0,552; 0,648)$ ,  
 (c)  $n \geq 4098$ .
4. Model:
  - $X_1, \dots, X_{25}$  výška chlapců v cm, náhodné veličiny s  $N(\mu_1, \sigma^2)$ ,
  - $Y_1, \dots, Y_{20}$  výška dívek v cm, náhodné veličiny s  $N(\mu_2, \sigma^2)$ ,
  - všechny veličiny  $X_1, \dots, X_{25}, Y_1, \dots, Y_{20}$  jsou nezávislé.
 95%-ní intervalový odhad spolehlivosti pro  $\mu_1 - \mu_2$  je  $(14,02; 17,38)$ .
5. (a) Oboustranný intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% je

$$(\hat{\lambda}_L, \hat{\lambda}_U) = \left( \bar{X}_n - u_{0.975} \frac{\sqrt{\bar{X}_n}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_{0.975} \frac{\sqrt{\bar{X}_n}}{\sqrt{n}} \right).$$

Pro data z příkladu (1.55, 2.58).

- (b) Oboustranný intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% je  $(\exp\{-\hat{\lambda}_U\}, \exp\{-\hat{\lambda}_L\})$ .  
 Pro data z příkladu (0.08, 0.21).

(c) Oboustranný intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% je

$$\left( \sum_{k=11}^{\infty} \frac{(\hat{\lambda}_L)^k}{k!} \exp\{-\hat{\lambda}_L\}, \sum_{k=11}^{\infty} \frac{(\hat{\lambda}_U)^k}{k!} \exp\{-\hat{\lambda}_U\} \right).$$

Pro data z příkladu  $(7.7 \cdot 10^{-7}, 8.1 \cdot 10^{-5})$ .

6. (a) Bodový odhad střední doby životnosti je 10 a intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 90% je (6.2, 13.8).
- (b) Bodový odhad mediánu životnosti je 6.9 a intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 90% je (4.3, 9.5).