

Babuška's paradox in linear and nonlinear bending theories



Sören Bartels

University of Freiburg, Germany

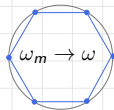
Prague, Czech Republic, September 22-27, 2024

Modelling, PDE Analysis and Computational Mathematics in Materials Science

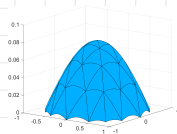
Joint work with Andrea Bonito (Texas A&M), Peter Hornung (TU Dresden),

Philipp Tscherner (U Freiburg)

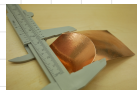
1 The paradox



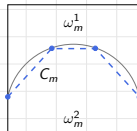
2 Ways to avoid it



3 Thin sheet folding



4 Polygonal creases

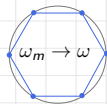


The paradox

Simply supported plates: Linear Kirchhoff model with $u|_{\partial\omega} = 0$

$$I(u) = \frac{\sigma}{2} \int_{\omega} |\Delta u|^2 dx + \frac{1-\sigma}{2} \int_{\omega} |D^2 u|^2 dx - \int_{\omega} f u dx$$

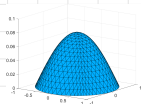
Babuška '61: Incorrect convergence $u_m \rightarrow u_{\infty} \neq u$
for solutions u_m on polygons $\omega_m \subset \omega$



Euler–Lagrange eq's: If $\partial\omega$ piecewise $C^{2,1}$

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \omega \\ u &= 0 && \text{on } \partial\omega \end{aligned}$$

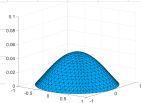
$$\Delta u + (1 - \sigma)\kappa \partial_n u = 0 \quad \text{on } \partial\omega$$



- Pointwise clamped condition in corners $\nabla u(c_i) = 0$
- For polygonal domains ω_m term involving κ disappears

Limit $u_{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$ solves

$$\Delta^2 u_{\infty} = f \quad \text{in } \omega, \quad u_{\infty} = 0 \quad \text{on } \partial\omega, \quad \Delta u_{\infty} = 0 \quad \text{on } \partial\omega$$



Polygonal approximation: Failure of compactness for $\kappa \partial_n u$

Regularity: Role of corners in Euler–Lagrange equations ?

Clamped BC: No paradox due to density of $C_c^\infty(\omega)$ in $H_0^2(\omega)$

Operator splitting: Two standard Poisson problems if ω convex & polygonal

Isoparametric methods: No paradox for quadratic boundary approximations

[Ciarlet & Raviart '72, Zlámal '72, Brenner, Neilan & Sung '13, Bonito, Guignard, Nochetto, Yang '23, ...]

Nonconforming/dG methods: Correct convergence on simplicial meshes

[Arnold & Walker '20, Wissel '23, ...]

Selected references:

- ▶ [Babuška '61] Domain perturbations
- ▶ [Scott '76] Ideas for avoiding the paradox
- ▶ [Rannacher '79] Special treatment of BC
- ▶ [Utku & Carey '83] Penalty approaches
- ▶ [Maz'ya & Nazarov '86] Other plate paradoxes
- ▶ [Babuška & Pitkäranta '90] Hard and soft simple support
- ▶ [Davini '02] Exterior approximations
- ▶ [De Coster, Nicaise & Sweers '19] Variational re-formulations

Modeling: Paradox due to limitations of linear Kirchhoff model?



- ▶ No paradox for Reissner–Mindlin (asymptotically, fixed $t > 0$)
- ▶ Free support $u|_{\partial\omega} \geq 0$ different due to non-positivity of Green's functions
[Nazarov, Sweers & Stylianou '11]

Curvature quantities: Elementary calculations yield

$$|D^2 u|^2 - |\Delta u|^2 = -2 \det D^2 u$$

Null Lagrangian: Express determinant as divergence ($Jv = v^\perp$)

$$2 \det D^2 u = \operatorname{div}(JD^2 u J \nabla u)$$

Simple support: Condition $u = 0$ on $\partial\omega$ yields $\partial_\tau u = 0$ and

$$\partial_\tau^2 u = -\kappa \partial_n u$$

Representation: Using density of $H^3 \cap H_0^1$ functions ($f = 0$) for p/w $C^{2,1}$ bdy

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{\sigma}{2} \int_\omega |\Delta u|^2 dx + \frac{1-\sigma}{2} \int_\omega |D^2 u|^2 dx & I_m(u) &= \frac{1}{2} \int_{\omega_m} |\Delta u|^2 dx + 0 \\ &= \frac{1}{2} \int_\omega |\Delta u|^2 dx + \frac{1-\sigma}{2} \int_{\partial\omega} \kappa (\partial_n u)^2 ds \end{aligned}$$

Consequence: Failure of Γ -convergence $I_m \rightarrow I$ for functionals I_m using polygonal domain approximations ω_m if $\partial\omega$ has curved parts

Sapondzhyan paradox: Loss of H^2 coercivity

Ways to avoid it

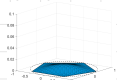
Reduced BC: Impose simple support in corners of ω_m only

Approximations: $I_m = I|_{\omega_m}$ for

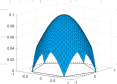
$$v \in \tilde{V}_m = \{v \in H^2(\omega_m) : v(c_i) = 0, i = 0, \dots, m\}$$

Justification: Γ -convergence w.r.t. strong convergence in $L^2(\omega)$ using trivial extensions of functions and derivatives

Full BC:



Reduced BC:



- **Stability:** If $I_m(v_m) \leq c$ then $\mathcal{I}_m v_m \in H_0^1$ and $D^2 v_m \rightharpoonup D^2 v$ for $v \in H^2 \cap H_0^1$

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} I_m(v_m) \geq I(v)$$

- **Consistency:** If $v \in H^3 \cap H_0^1$ then restrictions $v_m = v|_{\omega_m}$ admissible in V_m and $D^2 v_m \rightarrow D^2 v$, hence $I_m(v_m) \rightarrow I(v)$
- **Equicoercivity:** Perturbed Poincaré inequality $\|\nabla \mathcal{I}_m v_m\| \leq \tilde{c}_P \|D^2 v_m\|$

Other topologies: Strong convergence of $\mathcal{I}_m v_m$ in H_0^1

Rates: Bound $\|D^2(u - u_m)\|_{L^2(\omega_m)} \leq c(u, f)|\omega \setminus \omega_m|^{1/2} = O(h_m)$ (or $O(h_m^{3/2})$)

Necessary: Need to introduce nonconformity in BCs

Goal: Abstract Γ -convergence result $I_h \rightarrow I$ for approximations

$$I_h(u_h) = \frac{\sigma}{2} \int_{\omega_h} |\Delta_h u_h|^2 dx + \frac{1-\sigma}{2} \int_{\omega_h} |D_h^2 u_h|^2 dx, \quad u_h \in V_h$$

- ▶ ω_h domain triangulated by simplicial mesh $\mathcal{T}_h$
- ▶ $V_h \subset L^2(\omega_h)$ finite element space including BCs
- ▶ D_h^2 approximation of D^2

Assumptions: $\omega_h \subset \omega$ convex, boundary nodes of $\mathcal{T}_h$ belong to $\partial\omega$

- ▶ *Equicoercivity:* $\mathcal{J}_h v_h \in H_0^1$ with $\|\nabla \mathcal{J}_h v_h\|^2 \lesssim I_h(v_h)$
- ▶ *Stability of D_h^2 :* If $v_h \rightharpoonup v$ then $D_h^2 v_h \rightharpoonup D^2 v$
- ▶ *Interpolation in V_h :* $\mathcal{I}_h v \in V_h$ and $D_h^2 \mathcal{I}_h v \rightarrow D^2 v$ for $v \in H^3 \cap H_0^1$

Theorem (Correct convergence) [B. & Tscherner '24+]

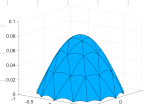
If conditions are satisfied then $I_h \rightarrow I$ w.r.t. strong convergence in L^2 .

Argyris element: H^2 -conforming FE using quintic polynomials

- ▶ *Stability of D_h^2* : Trivial as $D_h^2 = D^2$
- ▶ *Equicoercivity*: Integration by parts and interpolation

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathcal{I}_h^{p1} v_h\|^2 &= \int_{\omega_h} \mathcal{I}_h^{p1} v_h (-\Delta v_h) + \nabla \mathcal{I}_h^{p1} v_h \cdot \nabla (\mathcal{I}_h^{p1} v_h - v_h) dx \\ &\leq (c_P \|\Delta v_h\| + c_{p1} h \|D^2 v_h\|) \|\nabla \mathcal{I}_h^{p1} v_h\| \end{aligned}$$

- ▶ *Interpolation*: Use averaging in highest order derivatives for quasiinterpolation of $v \in H^3(\omega)$



Discrete Kirchhoff element: Discrete gradient $\nabla_h : V_h \rightarrow W_h$ and $D_h^2 = \nabla \nabla_h$

- ▶ *Stability of D_h^2* : Approximation properties of ∇_h
- ▶ *Equicoercivity*: As above with Δ_h and $D_{\mathcal{T}}^2$
- ▶ *Interpolation*: Use canonical interpolation operator $\mathcal{I}_h^{\text{dkt}}$



BC's: No canonical way to impose conditions for Hermite elements

Discrete operator: Elementwise integration by parts in strong form

$$\begin{aligned} a_h(v_h, w_h) = & (D_h^2 v_h, D_h^2 w_h) \\ & + (\{\partial_n \nabla_h v_h\}, [\nabla_h w_h])_{\cup S_h \setminus \partial \omega_h} + (\{\partial_n \nabla_h w_h\}, [\nabla_h v_h])_{\cup S_h \setminus \partial \omega_h} \\ & - (\{\partial_n \Delta_h v_h\}, [w_h])_{\cup S_h} - (\{\partial_n \Delta_h w_h\}, [v_h])_{\cup S_h} \end{aligned}$$

Stabilization: With suitable parameters $\gamma_0, \gamma_1 > 0$

$$s_h(v_h, w_h) = \gamma_0(h_S^{-3} [[v_h]], [w_h])_{\cup S_h} + \gamma_1(h_S^{-1} [\nabla_h v_h], [\nabla_h w_h])_{\cup S_h \setminus \partial \omega_h}$$

Discrete energy: SIPG formulation for $u_h \in \mathcal{L}^\ell(\mathcal{T}_h)$

$$l_h(u_h) = \frac{1}{2} a_h(u_h, u_h) + \frac{1}{2} s_h(u_h, u_h)$$

BC via penalty: Since $\text{dist}(\partial \omega, \partial \omega_h) \leq ch^2$, for $v \in H^3 \cap H_0^1$

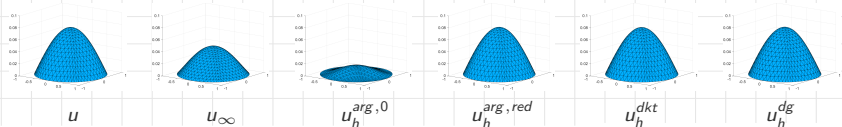
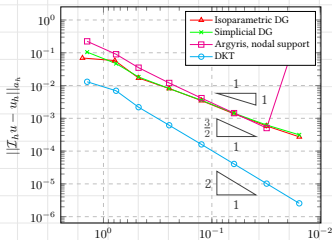
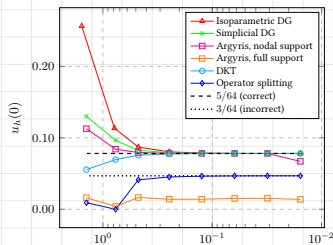
$$\varepsilon^{-1} \int_{\partial \omega_h} |v|^2 ds \lesssim \varepsilon^{-1} h^4 \|v\|_{H^3(\omega)}^2 \rightarrow 0$$

- ▶ *Stability of D_h^2 :* Apply lifting $H_h(v_h) \in L^2(\omega)^{2 \times 2}$ [Bonito et al. '23]
- ▶ *Equicoercivity:* As above with node averaging
- ▶ *Interpolation:* Use quadratic Lagrange interpolant

Babuška's example: For $\omega = B_1(0)$ and $f = 1$ obtain

$$u(x) = \frac{(5 + \sigma) - (6 + 2\sigma)|x|^2 + (1 + \sigma)|x|^4}{64(1 + \sigma)}, \quad u_\infty(x) = \frac{3}{64} - \frac{1}{16}|x|^2 + \frac{1}{64}|x|^4$$

Experiment: Midpoint- and H^2 -errors for $\sigma = 0$



Thin sheet folding

3D hyperelasticity: Isotropic & objective material

$$I^{3d}(y) = \int_{\Omega} W(\nabla y) \, dx \, dt - \int_{\Omega} f \cdot y \, dx \, dt$$



Bending: $\Omega_{\delta} = \omega \times (-\delta/2, \delta/2)$ and

$$\min_{y \in \mathcal{A}} I^{3d}(y) \sim \delta^3$$



Rigidity: [Friesecke, James, Müller '02] $\min_{R \in SO(3)} \|\nabla y - R\| \leq C \|\text{dist}(\nabla y, SO(3))\|$

Theorem [Kirchhoff 1850, FJM '02]. Functionals $\delta^{-3} I^{3d}$ Γ -converge to

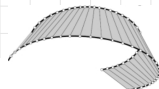
$$I^{2d}(y) = \frac{1}{2} \int_{\omega} |II|^2 \, dx - \int_{\omega} \tilde{f} \cdot y \, dx$$

for isometries $y : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, i.e., $I = \mathbb{I}_{2 \times 2}$, with fundamental forms

$$I = \nabla y^T \nabla y, \quad II = \nu^T D^2 y, \quad \nu = \partial_1 y \times \partial_2 y$$

Isometry condition implies $\partial_j^2 y \cdot \partial_k y = 0$ and

$$|II|^2 = 4H^2 = |\Delta y|^2 = |D^2 y|^2, \quad K = 0$$



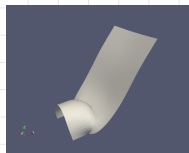
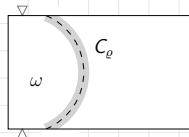
Prepared material: Inhomogeneous material and deformation $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$I^{3d}(y) = \int_{\Omega} W(x, \nabla y) \, dx \, dt - \int_{\Omega} f \cdot y \, dx \, dt$$

Material softer (damaged) along arc $C \subset \bar{\omega}$

Model reduction: $\Omega = \omega \times (-\delta/2, \delta/2)$

- ▶ narrow region C_ϱ , soft material $\mathbb{C}_\varepsilon$
- ▶ appropriate scaling relations $\varepsilon, \varrho, \delta$
- ▶ ∇y discontinuous across C



For isometry $y \in H^2(\omega \setminus C; \mathbb{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$

$$I_{\text{fold}}(y) = \frac{1}{2} \int_{\omega \setminus C} |D^2 y|^2 \, dx - \int_{\omega} \tilde{f} \cdot y \, dx$$

Proof: [B., Bonito & Hornung '22] following [Friesecke, James & Müller '02]

Related: [Conti & Dolzmann '09, Santilli & Schmidt '23]

Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

51

4.

Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.

(Von G. Kirchhoff, Privatdocent an der Universität zu Berlin.)

Der erste Versuch einer Theorie der Transversalschwingungen elastischer Scheiben ist von *Sophie Germain* bekannt gemacht. Im Jahre 1811 reichte sie der Pariser Akademie, die einen Preis für eine solche Theorie ausgesetzt hatte, eine Abhandlung ein, in welcher eine Hypothese über die Kräfte auseinandergesetzt war, mit denen eine Scheibe Formveränderungen widerstrebt, und aus dieser Hypothese war eine partielle Differentialgleichung für die Schwingungen abgeleitet. Die Verfasserin hatte bei der Rechnung einen Fehler gemacht; *Lagrange*, der sich in der zur Begutachtung der Abhandlung niedergesetzten Commission befand, leitete aus ihrer Hypothese die Differentialgleichung ab, welche eine richtige Rechnung geben mußte. Es ist dieses dieselbe, welche noch jetzt als die richtige anerkannt wird. Noch fehlten aber die Grenzbedingungen, durch welche die Lösung der partiellen Differentialgleichung erst zu einer bestimmten wird. Diese hat *Sophie Germain* in einer zweiten Abhandlung, die sie 2 Jahre später der Akademie übergab, aus derselben Hypothese abgeleitet. Sie waren von der Art, daß die Verfasserin die Lösung des Problems für den Fall rechteckiger Scheiben ermitteln konnte. Sie verglich ihre theoretischen Resultate für diesen Fall mit Beobachtungen und fand eine Übereinstimmung, die ihre Hypothese zu bestätigen schien. In einer dritten Abhandlung, die sie 1815 der Akademie überreichte, erweiterte sie ihre Hypothese so, daß sich aus derselben auch die Theorie der Schwingungen von Platten ableiten ließ, die im natürlichen Zustande gekrümmt sind. Sie konnte die Rechnung für cylindrisch gekrümmte Platten durchführen und fand auch hier ihre theoretischen Resultate im Einklang mit experimentellen.

Diese 3 Abhandlungen sind nicht gedruckt; den Hauptinhalt derselben und die Ergebnisse ihrer fortgesetzten Forschungen hat die Verfasserin in zwei Schriften veröffentlicht, von denen die erste „Recherches sur la théorie des surfaces élastiques“ im Jahre 1821, die zweite „Remarques sur la nature,

7 *

86 4. Kirchhoff, üb. d. Gleichgewicht u. d. Bewegung einer elastischen Scheibe.

Töne angegeben, welche eine Scheibe geben kann, deren tiefster Ton *C* ist. In den mit *Ca* überschriebenen Columnen finden sich die Töne, welche *Cladani* beobachtet hat, in den mit *P* überschriebenen die, welche die Rechnung unter der Voraussetzung $\theta = \frac{1}{2}$, in den mit *W* überschriebenen die, welche die Rechnung unter der Voraussetzung $\theta = 1$ geliefert hat. Die Angaben beziehen sich also auf die gleichschwebende Temperatur *). Jeder berechnete Ton ist durch den ihm zunächst liegenden Ton der Scala bezeichnet, dem ein + oder - beigefügt ist, je nachdem jener etwas höher oder tiefer als dieser war.

μ	$n = 0$			$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$		
	<i>Ca.</i>	<i>P.</i>	<i>W.</i>	<i>Ca.</i>	<i>P.</i>	<i>W.</i>	<i>Ca.</i>	<i>P.</i>	<i>W.</i>	<i>Ca.</i>	<i>P.</i>	<i>W.</i>
0	—	—	—	—	—	—	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>d</i>	<i>dis</i> —	<i>dis</i> —
1	<i>Gis</i>	<i>Gis</i> +	<i>A</i> +	<i>b</i>	<i>h</i> —	<i>e</i> —	<i>g</i>	<i>gis</i> +	<i>a</i> —	<i>d</i> . <i>dis</i>	<i>dis</i> +	<i>e</i> —
2	$\sqrt{a}+$	$\sqrt{b}$ —	$\sqrt{c}+$	$\sqrt{d}$ +	$\sqrt{e}$ +	$\sqrt{f}$ +						

Es zeigen sich hier nicht unbedeutliche Abweichungen der beobachteten Töne von den durch die beiden Rechnungen ermittelten. Die beobachteten Töne stimmen mit den aus der *Poisson'schen* Annahme ($\theta = \frac{1}{2}$) ermittelten etwas besser überein, als mit den aus der *Wertheim'schen* Annahme ($\theta = 1$) berechneten; doch ist die Abweichung bei jenen zu groß, als daß hieraus ein Schluß gegen diese Annahme gezogen werden könnte.

Ich wende mich jetzt zur Vergleichung einiger numerischen Resultate, welche die Theorie in Bezug auf die Knotenlinien giebt, mit den entsprechenden Resultaten der Beobachtung. Hr. Professor *Srebrke* hat die Güte gehabt, mir die Ergebnisse einiger Messungen von ausgezeichnete Genauigkeit mitzuteilen, die er an zwei kreisförmigen Glasscheiben angestellt hat. Diese Scheiben waren mit derselben Sorgfalt gearbeitet, wie die quadratischen Scheiben, an denen er die Messungen angestellt hat, die von ihm in *Doe's* Repertorium Bd. III. S. 113 bekannt gemacht sind; die eine von ihnen hatte ungefähr 6 Zoll Durchmesser und 1 Linie Dicke, die andere 7 Zoll Durchmesser und 1,1 Linie Dicke. Zum Beweise der Vollkommenheit der Scheiben und der Genauigkeit der Messungsmethode kann die Kleinheit der Unterschiede der folgenden Zahlen dienen, die durch Messung verschiedener Durchmesser des Knotenkreises ohne Knotendurchmesser auf einer Scheibe gefunden wurden.

*) *Cladani* sagt zwar nicht ausdrücklich in seiner Akustik, aus welcher seine Angaben genommen sind, daß dieselben sich auf die gleichschwebende Temperatur beziehen; doch scheint es unabweisbar, daß dem so ist.

- ▶ Electrical engineering (laws for electrical circuits)
- ▶ Physics (spectral analysis with Robert Bunsen)

Quote: Eine gute Theorie ist das Praktischste, was es gibt!

Isometries: Piecewise C^1 isometry [Kirchheim '01, Müller & Pakzad '05] $y : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\nabla y)^T \nabla y = \mathbb{I}_{2 \times 2}$$

Folding arcs: Folding curve $b : I \rightarrow \bar{\omega}$ maintains geodesic curvature κ under isometric deformation

Darboux frames: Normals n^ℓ define Darboux frames

$$r^\ell = [\gamma', n^\ell, \gamma' \times n^\ell] \in SO(3), \quad \gamma = y \circ b$$

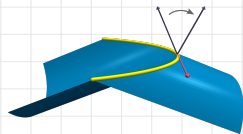
Folding angle: Since frames share tangent γ'

$$r^2 = R(\theta, \gamma') r^1$$

Curvatures: Geodesic $\kappa = (r_1^\ell)' \cdot r_2^\ell$ and normal $\mu^\ell = (r_1^\ell)' \cdot r_3^\ell$ curvatures and torsion $\tau^\ell = (r_2^\ell)' \cdot r_3^\ell$ related via, **unless** $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$,

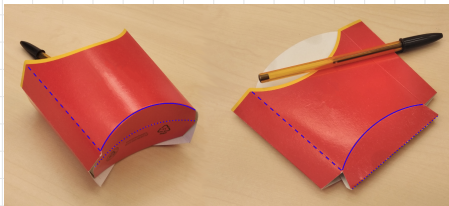
$$\kappa \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \mu^\ell \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \tau^2 = \tau^1 + \theta'$$

Related: Simpler version in [Duncan & Duncan '82]



Implications: For deformed plate along crease C

- ▶ if $\kappa = 0$ then either unfolded or folded back or θ constant and $\mu^\ell = 0$
- ▶ if $\kappa \neq 0$ then either unfolded or $\mu^\ell \neq 0$ and θ uniquely defined

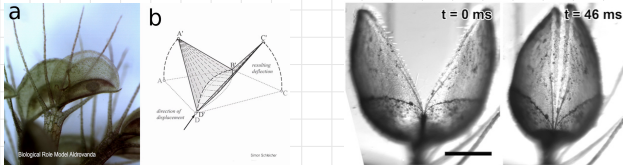


Related: Periodic kirigami structures (e.g., maps and deployable structures)

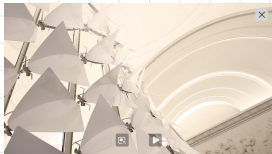
- ▶ [Liu, Choi, Mahadevan '21] 17 patterns define periodic tilings of the plane
- ▶ [James & Liu '22+] Origami structures with curved tiles between creases

Carnivorous plants: Closing of *aldrovanda vesiculosa* (Wasserfalle)

[Körner et al., Westermeier et al. '18]



Bionics and insect wings: Flectofold construction and ladybird



Flectofold construction
Source: Axel Körner

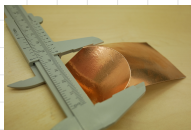


Source: University of Tokyo,
The Sydney Morning Herald

Polygonal creases

No paradox? $|D^2y|^2 = |\Delta y|^2$ for isometries; K enters via iso constraint

Experiment: Singularities at corner points, i.e., $y_m \notin H^2(\omega \setminus C_m)$?



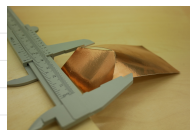
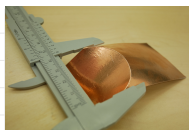
Theorem [B., Bonito & Hornung '24+]

There are no nontrivially folded isometries $y_m \in H^2(\omega \setminus C_m)$ for polygonal crease lines C_m which are C^1 in the closure of a subdomain.

Idea of proof:

- ▶ y_m folded $\implies$ flat ($\mu = 0$, θ constant) or folded back (μ arbitrary, $\theta = \pi$)
- ▶ If $y_m \in C^1(\bar{\omega}_1)$ then $\nabla y(x_c^\pm) = Q_\pm \nabla y(x_c)$ with $Q_+ \neq Q_-$
- ▶ Obtain jumps of ∇y_m in corner x_c contradicting H^2 property □

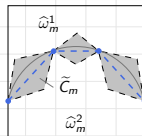
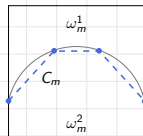
Idea: Use slits along segments



Approximation:

$$\mathcal{A}_m = \{y \in H^2(\omega \setminus C_m) \cap W^{1,\infty}(\omega) : \\ y \text{ iso \& continuous in corners}\}$$

$$I_m(y) = \frac{1}{2} \int_{\omega \setminus C_m} |D^2 y|^2 dx, \quad y \in \mathcal{A}_m$$



Theorem [B., Bonito & Hornung '24+] Γ -convergence $I_m \rightarrow I$.

Proof: (i) $D^2 y_m$ p/w bounded in L^2 gives weak limit H ; linear interpolation of y_m gives limit $y \in W^{1,\infty}(\omega)$ satisfying iso constraint and $D^2 y = H$ in $\omega \setminus C$

(ii) Extensions/restrictions $y|_{\omega_m^i \cap \omega^i}$ provide recovery sequence □

Avoid extension: Cut out diamonds along C_m so that $\hat{\omega}_m^i \subset \omega^i$

- ▶ Babuška's paradox in variational formulation
- ▶ Impose simple support in corners only, avoid curved elements
- ▶ Paradox explains singularities in nonlinear bending problems
- ▶ Ongoing and future work:
 - ▷ Efficient numerics
 - ▷ Optimize crease lines
 - ▷ Transfer to applications
- ▶ More information

<http://aam.uni-freiburg.de/bartels>



Thank you !