

## Aplikace určitého integrálu

1. Nalezněte obsah oblasti ohraničené  $xy = 4$ ,  $x + y = 5$ .
2. Nalezněte obsah oblasti ohraničené  $y = \ln x$ ,  $y = \ln^2 x$ .
3. Nalezněte obsah elipsy s poloosami  $a$ ,  $b$ .
4. Nalezněte obsah oblasti ohraničené kardioidou  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $a > 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .
5. Nalezněte obsah oblasti ohraničené lemniskátou  $r = 4 \sin^2 \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .
6. Nalezněte obsah oblasti ohraničené  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ .
7. Odvoďte vztahy pro objem koule, kuželu, jehlanu.
8. Spočítejte objem tělesa vzniklého rotací oblouku kardioidy  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$  kolem osy  $x$ .
9. Spočítejte objem části tělesa  $x^2 + 4y^2 \leq a^2$  ležícího mezi rovinami  $z = 0$  a  $y = z$ .
10. Odvoďte vztah pro délku kružnice.
11. Spočítejte délku křivky  $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .
12. Spočítejte délku evolventy kruhu  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
13. Odvoďte vzorec pro povrch koule.
14. Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky  $y = x^3$ ,  $|x| \leq 1$  kolem osy  $x$ .
15. Nalezněte polohu těžiště homogenního čtvrtkruhu o poloměru  $r$ .
16. Nalezněte polohu těžiště poloviny homogenní asteroidy  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in [0, \pi]$ .
17. Nalezněte polohu těžiště homogenní polokoule  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $x > 0$ .
18. Určete moment setrvačnosti oblouku asteroidy (viz výše,  $t \in [0, \pi/2]$ ) vzhledem k souřadnicovým osám.
19. Přímočarý pohyb tělesa je daný funkcí  $s = ct^3$ , kde  $s(t)$  je délka dráhy za čas  $t$ . Odpor prostředí je úměrný čtverci rychlosti. Vypočítejte práci, kterou vykonají třecí síly, pokud těleso projde dráhu od  $s = 0$  do  $s = a$ .

20. Najděte velikost intenzity elektrostatického pole vodiče tvaru kružnice s poloměrem  $r$  a nábojem  $Q$  v bodě  $M$  na přímce, která je kolmá na rovinu kružnice a prochází jejím středem.
21. Při průchodu radioaktivního záření vrstvou látky o tloušťce  $h$  poklesla jeho intenzita na polovinu původní hodnoty. Jaká bude intenzita tohoto záření po průchodu vrstvou o tloušťce  $H$ ? (Úlohu řešte za předpokladu, že intenzita záření absorbovaného tenkou vrstvou látky je přímo úměrná tloušťce vrstvy a intenzitě dopadajícího záření).

## Newtonův integrál, konvergence integrálu

Spočtěte

22.  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

23.  $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$

24.  $\int_0^1 x \ln x dx$

25.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$

26.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$

Zjistěte, zda konvergují integrály

$$27. \int_0^{\infty} x^p dx, p \in R$$

$$28. \int_1^{\infty} x^p dx, p \in R$$

$$29. \int_0^{10} x^p dx, p \in R$$

$$30. \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$$

$$31. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx$$

$$32. \int_0^2 \frac{1}{\ln x} dx$$

$$33. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x^p} dx, p \in R$$

$$34. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$