

Příklady na 2. týden

Číselné řady

1. Nalezněte  $n$ -tý částečný součet a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2.$$

2. Pro reálná  $x$  nalezněte částečné součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{inx} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

3. Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2^n}.$$

4. Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a + nd)q^n, \quad a, d \in R, \quad |q| < 1.$$

Sečtěte

- 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

- 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

7. Na základě elementárních úvah rozhodněte zda řady konvergují či divergují

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}.$$

Použitím kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi.

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

9.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

10.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{(n)^\alpha}, \alpha \in R$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1), \alpha \in R$$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$$

15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$$

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$$

17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n})^n}$$

18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n}{2}}}$$

19.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, p \in R$$

20.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}, p, q \in R$$

21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}$$

22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}, p, q \in R$$

23.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p, p \in R$$

Použitím kritérií pro konvergenci řad rozhodněte o konvergenci (absolutní i neabsolutní, je-li to možné) či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi.

24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

25.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$$

26.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

28.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in R$$

29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$$

32.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}), \quad k \in R$$

33.

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln n}$$

34.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

35.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\ln \ln n}$$

36.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

37.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$$

38.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

39.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad p \in R$$

40.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad p \in R, 0 < x < \pi$$

41.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}, \quad p \in R$$

42.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\sin \frac{n\pi}{4} + n^p}, \quad p \in R$$

43.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}$$