Příklady na 4. týden

Metrické prostory, topologie R^n

1. Jako vzdálenost mezi dvěma místy na území ČR definujme jako
a) vzdálenost na mapě b) nejkratší vzdálenost jízdy autem c) cena jízdenky ČD. Jde v těchto případech o metriku? (Pro případ b), c) ji chápeme pouze na takové podmnožině, kde má funkce vzdálenost smysl.)

2. Ověřte, zda následující množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ jsou metrické prostory.
a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$
b) Množina l_2 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
c) Množina l_∞ všech posloupností splňující $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = \sum_n |x_n - y_n|$

3. V R^2 s obvyklou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí a)
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
b) $f(x) = D(x)$ (Dirichletova funkce).

4. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin
a) Množina všech racionálních čísel z intervalu $(0,1) \subset R$
b) Množina všech $(x,y) \in R^2$ splňujících nerovnosti
$$x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0.$$
c) Množina všech $(x,y,z) \in R^3$ splňujících nerovnosti
$$|z| < x^2 + y^2 \leq 1.$$
d) $R \setminus \{\frac{1}{n}; n \in N\}$.
e) Jednotkový kruh se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

5. Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené
a) Množina všech $(x,y,z) \in R^3$ splňujících nerovnost
$$x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$
b) Množina všech $(x,y,z) \in R^3$ splňujících nerovnost
$$1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

6. Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t \in R$)
$$M_t = \{(x,y) \in R^2; (|x| + |y|)e^{-(|x|+|y|)} \leq t\}$$

7. Je množina
$$M = \{(x, y, z) \in R^3; 2 \leq xyz < 4\}$$
omezená?

8. Dokažte omezenost množiny
$$M = \{(x, y) \in R^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

9. Dokažte konvexitu množiny
$$M = \{(x, y, z) \in R^3; |x| + e^y < e, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

10. Dokažte souvislost množiny
$$M = \{(x, y) \in R^2; x^4 + |\arctan x| + y^2 e^{|y|} = 2\}$$

11. Nechť $A \subset X$. Dokažte, že $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

12. Nechť $A, B \subset R^N$. Ukažte že, $(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial(A \times B)$. Kdy platí rovnost?

13. Nechť X, Y jsou metrické prostory (popř. R^N, R^M pokud vám to pomůže pro lepší představu). Nechť $A, B \subset X$. Dokažte
(a) $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(b) $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(c) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A
(d) $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina A
(e) $\operatorname{ext} A$ je největší otevřená množina disjunktní s A
(f) $x_0 \in \overline{A}$ právě když existují $x_n \in A$, $x_n \to x_0$
(g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(h) Platí analogické tvrzení pro průnik?
(i) Je-li $F : X \to Y$ spojité, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Obyčejné diferenciální rovnice

Separované proměnné

Nalezněte obecné řešení nebo řešení Cauchyovy úlohy

14. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

15. $y' = \dfrac{1 - x}{y}$

16. $y' = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{2y(1 + \mathrm{e}^x)}$

17. $y' = \dfrac{y \ln y}{\sin x}$

18. $y' = -\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$

19. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

20. $y' = \sqrt{1-y^2}$

21. $y' = -\dfrac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$

22. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$

23. $y' = \dfrac{2xy^2}{1-x^2}$, $y(0) = 1$

24. $y' = \alpha y(P_m - y)$, $y(0) = y_0 \in (0, P_m)$ (regulovaný růst počtu obyvatel)

25. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'(2 - \mathrm{e}^x) = -3\mathrm{e}^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$$

procházející bodem $(0, \frac{\pi}{4})$ splňující
a) $y(\ln 3) = 0$ b) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{4}$ $y(\ln 3) = \frac{\pi}{2}$

26. Kterými body prochází právě jedno maximální řešení rovnice $xy' - y = 0$?

27. Meteroid, který se nachází výhradně pod vlivem zemské přitažlivosti, začíná padat k Zemi z klidové polohy ve vzdálenosti h. Nalezněte závislost rychlosti meteroidu na vzdálenosti od povrchu Země. Jakou rychlostí dopadne na zemský povrch, zanedbáme-li vliv zemské atmosféry? Obě úlohy řešte i pro limitní případ $h = \infty$. Poloměr Země je přibližně 6378 km.

28. Najděte křivky, pro které platí, že úsečka, ležící na tečně této křivky s krajními body na souřadných osách, má střed v bodě dotyku. Napište rovnici křivky, která prochází bodem (2,3).