

## ODR

### Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

Nalezněte obecná řešení rovnic. Pokud nejsou ve tvaru totálního diferenciálu, hledejte vhodný integrační faktor ve tvaru  $\mu = \mu(x)$  nebo  $\mu = \mu(y)$ .

1.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

2.

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

3.

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0$$

4.

$$(xy^2 + y)dx - xdy = 0$$

Hledejte integrační faktor ve tvaru  $\mu = \mu(x + y)$  nebo  $\mu = \mu(xy)$ .

5.

$$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$$

6.

$$(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)dy = 0$$

## Posloupnosti a řady funkcí

### Posloupnosti funkcí

Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí

7.

$$e^x \frac{\sin x \sin 2x \dots \sin nx}{\sqrt{n}}$$

8.

$$\frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$$

9.

$$\sin \pi xn$$

Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

10.  $x^n - x^{n+1}$  na  $[0, 1]$
11.  $x^n - x^{2n}$  na  $[0, 1]$
12.  $\operatorname{arctg} nx$  na  $(0, \infty)$
13.  $x \operatorname{arctg} nx$  na  $(0, \infty)$
14.  $\frac{nx}{1+n^2x^2}$  na a)  $\{x \in C; |x| \leq \varepsilon\}$  b)  $\{x \in C; |x| \geq \varepsilon\}$
15.  $\sin \pi x^n$  na  $[0, 1]$
16.  $\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$  na a)  $(0, \varepsilon)$  b)  $(\varepsilon, \infty)$
17.  $\sqrt[n]{1+x^n}$  na  $[0, \infty)$
18.  $\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}$  na  $[0, \infty)$

Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé.

19.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} dx$$

20.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$$

21.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n$$

## Funkce více proměnných

### Taylorův rozvoj

22. Rozložte funkci  $\sqrt{1-x^2-y^2}$  podle Taylorova vzorce se středem v počátku do členů 4. řádu.
23. Rozložte funkci  $\frac{\cos x}{\cos y}$  podle Taylorova vzorce se středem v počátku do členů 2. řádu.

### Lokální extrémy funkcí více proměnných

Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

24.  $x^2 + y^2$ ;  $x^2 - y^2$ ;  $-x^2 - y^2$
25.  $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
26.  $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
27.  $(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)e^{x+y}$
28.  $xy \ln(x^2 + y^2)$  pro  $(x, y) \neq (0, 0)$ , 0 pro  $(x, y) = (0, 0)$
29.  $x + y + 4 \cos x \cos y$
30.  $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$  na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$
31.  $x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$
32.  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
33.  $(ax + by + cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$