

## ODR

### Posloupnosti a řady funkcí

#### Řady funkcí

Najděte obor absolutní a neabsolutní bodové konvergence řad funkcí

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos x$$

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

Zjistěte, zda řady funkcí konvergují stejnoměrně na daných intervalech

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n \quad \text{a) } [0, 1] \quad \text{b) } \left[0, \frac{999}{1023}\right]$$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \quad \text{a) } [\epsilon, 2\pi - \epsilon], 0 < \epsilon < \pi, \quad \text{b) } [0, 2\pi]$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} \quad \text{a) } [-K, K], K > 0, \quad \text{b) } (-\infty, \infty)$$

11.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \quad \text{a) } [-K, K], K > 0, \quad \text{b) } (-\infty, \infty)$$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sqrt[n]{x^2} \quad \text{a) } [0, K], K > 0, \quad \text{b) } [0, \infty)$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{nx}, \alpha \in Z_0^+ \quad \text{a) } (-\infty, -1] \quad \text{b) } [-1, 0] \quad \text{c) } [0, 1]$$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{x^2+k^2}) \sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad k \in R \quad (-\infty, \infty)$$

15.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \quad \text{a) } [-K, K], K > 0, \quad \text{b) } (-\infty, \infty)$$

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x \ln \frac{x}{n} \quad \text{a) } (0, K], K > 0, \quad \text{b) } (0, \infty)$$

17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} e^{-nx} \quad \text{a) } [0, K], K > 0, \quad \text{b) } [0, \infty)$$

18. Hleďte řešení Besselovy rovnice  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$  pro  $n = \frac{1}{2}$  ve tvaru  $x^\varrho \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$  s vhodným  $\varrho$ .

19. Nalezněte řešení Besselovy rovnice pro  $n = 0$  ve tvaru  $K_0(x) = \ln x \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s + \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s$ .

## Funkce více proměnných

### Vázané extrémny

Nalezněte extrémny dané funkce vzhledem k vazbě

20.  $xy$ ;  $x + y = 1$
21.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ;  $x^2 + y^2 = 1$
22.  $x^2 + y^2$ ;  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
23.  $x^m y^n z^p$ ;  $x + y + z = a$ ,  $m, n, p, a > 0$
24.  $\sin x \sin y \sin z$ ;  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ ,  $x, y, z > 0$
25.  $\sum_{i=1}^n x_i^p$ ;  $\sum_{i=1}^n x_i = a$ ,  $p > 1$ ,  $a \geq 0$

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce na uvedené množině

26.  $x - 2y - 3$ ;  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq x + y \leq 1$
27.  $x^2 - xy + y^2$ ;  $|x| + |y| \leq 1$
28.  $x^2 + y^2 - 12x + 16y$ ;  $x^2 + y^2 \leq 25$
29.  $x + y + z$ ;  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$
30. Při jakých rozměrech má kvádr daného objemu nejmenší povrch?
31. Do daného kužele vepište hranol o  $n$ -úhelníkové podstavě, který má maximální objem.
32. Najděte vzdálenost bodu  $(p, q, r)$  od roviny  $ax + by + cz + d = 0$ .
33. Najděte vzdálenost  $d$  dvou mimoběžek

$$\begin{aligned}x &= X_1 + at & x &= X_2 + pt \\y &= Y_1 + bt & y &= Y_2 + qt \\z &= Z_1 + ct & z &= Z_2 + rt.\end{aligned}$$

34. Pomocí hledání vázaných extrémů dokažte
  - a) AG nerovnost  $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$ ,  $a_i \geq 0$
  - b) Hölderovu nerovnost  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$ ,  $x_i, y_i \geq 0$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
35. V počátku kartézských souřadnic je umístěn bodový náboj  $Q$ .
  - a) Jaké bodové náboje  $Q_A, Q_B, Q_C$  musíme umístit do bodů  $A = (3, 0, 0)$ ,  $B = (0, 3, 0)$   $C = (0, 0, 4)$ , aby náboj  $q$  v bodě  $(1, 1, 1)$  byl v rovnováze.
  - b) Bude tato rovnováha stabilní?