Příklady na 13. týden

# Henri Lebesgue a jeho integrál

## Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x dx$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx} x^2 dx$

   Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

5. $\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} dx \qquad (\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6})$
6. $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} dx \qquad (\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6})$
7. $\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} dx \qquad (\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90})$

# Funkce více proměnných

## Implicitní funkce, věta o regulárním zobrazení

8. Dokažte, že existuje okolí $V$ bodu $(1,1)$ takové, že množina

$$\{(x,y); x^3 + y^3 - 2xy = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy $C^2$ na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

9. Dokažte, že existuje okolí $V$ bodu $(3,-2,2)$ takové, že množina

$$\{(x,y,z); z^3 - xz + y = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy $C^2$ na nějakém okolí bodu $(3,-2)$. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3,-2)$.

10. Spočtěte parciální derivace 2. řádu funkce implicitně zadané vztahem $x + y + z = \mathrm{e}^{-(x+y+z)}$.

11. Nalezněte první a druhý diferenciál funkce dané vztahem $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.

12. Jsou-li $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$ implicitně zadány vztahem $F(x, y, z) = 0$, ukažte, že $f_y g_z h_x = -1$.

13. Napište $du$ a $dv$, je-li $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$.

14. Hledejte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, dané implicitně vztahem

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)\,.$$

15. Vyřešte rovnici $(z_y)^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$ tím, že položíte $x = u$, $y = v$, $z = w$ a přepíšete ji na rovnici pro funkci $u$ proměnných $v$ a $w$.

16. Vyjádřete první složku $f_x$ vektoru $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ve sférických souřadnicích $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$.

    Přepište do nových proměnných

17. $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

18. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

19. $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.