(**9 bodů**) Nechť

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x(y-1)^2}.$$

- Určete definiční obor funkce a kde je funkce spojitá.
- Určete, kde existují parciální derivace 1. řádu a kde jsou spojité.
- Nechť $A = [0,0]$, $B = [0,1]$, $C = [1,0]$, $D = [1,1]$.

Určete, ve kterých bodech existuje totální diferenciál f. Pokud existuje, pak ho spočtěte. Vše zdůvodněte!

Definiční obor funkce $f(x,y)$ je $\mathbb{R}^2$ a funkce je na svém definičním oboru spojitá (například proto, že funkce je složením spojitých funkcí). (**1 bod**)

Parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (y-1)^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} (y-1)^{-\frac{1}{3}} \quad (2)$$

zřejmě existují mimo množinu $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 1\right\}$. Dále je zřejmé, že parciální derivace neexistují na možinách $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \neq 1\right\}$ a $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y = 1\right\}$. Zbývá prozkoumat parciální derivace v bodě $[x,y] = [0,1]$, dle definice je (**1 bod**)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h \to 1} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

je tedy (**1 bod**)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0.$$

V bodech $A = [0,0]$ a $D = [1,1]$ neexistují parciální derivace a tudíž zde neexistuje ani totální diferenciál. (**1 bod**)

V bodě $C = [1,0]$ jsou parciální derivace spojité a tudíž zde existuje totální diferenciál. Jeho hodnotu určíme snadno ze znalosti parciálních derivací (dosazujeme $[x,y] = [1,0]$ do (1) a (2)) (**1 bod**)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\frac{2}{3}.$$

Totální diferenciál v bodě $C = [1,0]$ je pak dán jako (**1 bod**)

$$df\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)h_2 = \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}h_2.$$

V bodě $B = [0,1]$ nejsou parciální derivace spojité a je tudíž potřeba prozkoumat existenci totálního diferenciálu podle definice. Jako kandidát na totální diferenciál připadá v úvahu pouze lineární zobrazení **(1 bod)**

$$df\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)h_2 = 0.$$

Dle definice by mělo platit

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f(h_1, 1+h_2) - f(0,1) - df([0,1])[h_1,h_2]|}{\|h\|} = 0,$$

jest ovšem

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f(h_1, 1+h_2) - f(0,1) - df([0,1])[h_1,h_2]|}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \neq 0,$$

neboť stačí volit například $h_1 = h_2$. V bodě $B = [0,1]$ tudíž totální diferenciál neexistuje. **(1 bod)**

(**9 bodů**) Nalezněte a klasifikujte lokální extrémy funkce

$$g(x,y) = (x^2 + y^2 + 4x)\mathrm{e}^{-x-y}.$$

Funkce je spojitě diferencovatelná na celém $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace jsou (**1 bod**)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) &= \left(2x - 4 + x^2 + y^2\right) e^{-x-y} \\
\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &= \left(-2y + x^2 + y^2 + 4x\right) e^{-x-y}
\end{aligned}$$

Nutná podmíka pro lokální extrém

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

dává

$$\begin{aligned}
2x - 4 + x^2 + y^2 &= 0 \\
-2y + x^2 + y^2 + 4x &= 0.
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic jsou body[1] (**4 body**)

$$\begin{aligned}
A &= [0,2] \\
B &= [-3,-1].
\end{aligned}$$

Matice kvadratické formy druhého diferenciálu je (**1 bod**)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x,y) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 + x^2 + y^2 & -2\,y + 2\,x - 4 + x^2 + y^2 \\ -2\,y + 2\,x - 4 + x^2 + y^2 & 2 - 4\,y + x^2 + y^2 + 4\,x \end{bmatrix} e^{-x-y}.$$

Speciálně v bodě $A = [0,2]$ je matice kvadratické formy druhého diferenciálu (**0,5 bodu**)

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} e^{-2}.$$

Sylvestrovo kritérium nedává v tomto případě žádnou informaci. Signaturu kvadratické formy lze určit například doplněním na čtverec[2]

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -2x^2 - 8xy - 2y^2 = -2(x^2 + 4xy) - 2y^2 = -2(x+2y)^2 + 8y^2 - 2y^2 = -2(x+2y)^2 + 6y^2.$$

---

[1] Užíváme standardního „pořadí“ složek vektoru $[x,y]$.

[2] Kladná konstanta e^{-2} nehraje při určování signatury kvadratické formy roli a proto ji vynecháváme.

Kvadratická forma druhého diferenciálu je tedy indefinitní a stacionární bod $A = [0, 2]$ je tudíž bodem sedlovým (není zde lokální extrém). (**1 bod**)

V bodě $B = [-3, -1]$ je matice kvadratické formy druhého diferenciálu (**0,5 bodu**)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} e^4.$$

Dle Sylvestrova kritéria je tato kvadratická forma pozitivně definitní a a stacionární bod $B = [-1, -3]$ je tudíž bodem lokálního minima. (**1 bod**)