První zápočtový test

[0,5b]

1. Je-li $z = 1 + i$, pak $z\overline{z}$ je rovno:

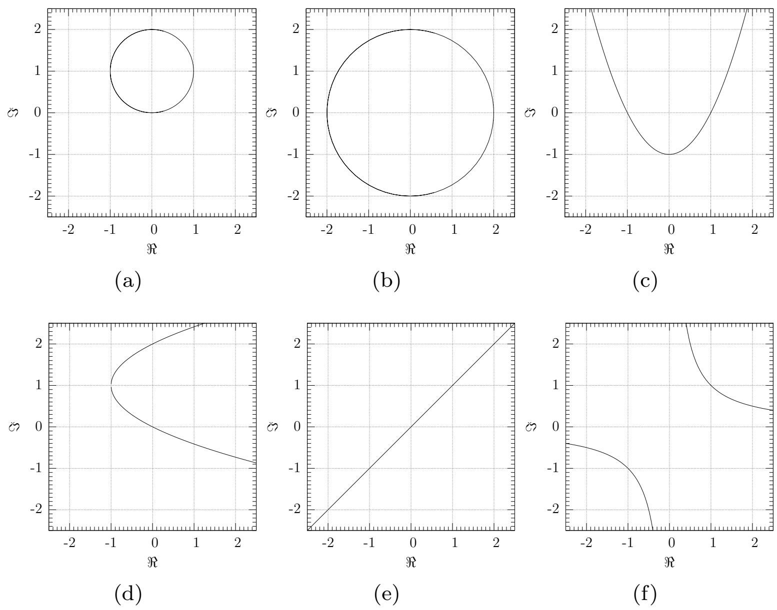
   (a) 3
   (b) 2
   (c) i
   (d) $-\sqrt{2}$
   (e) $\sqrt{2}$
   (f) jinak

   Komplexně sdružené číslo k číslu z je $1 - i$, a tedy

$$z\overline{z} = (1 + i)(1 - i) = 1 - i + i + 1 = 2.$$

[0,5b]

2. Všechny body $z \in \mathbb{C}$ vyhovující rovnici $|z - i| = 1$ leží na určité křivce v $\mathbb{C}$. Tato křivka je znázorněna na obrázku:



Rovnici $|z - i| = 1$ vyhovují všechny body v komplexní rovině, jejichž vzdálenost od bodu i je 1 – hledanou křivkou je tudíž kružnice se středem v bodu $i = [0, 1]$ o poloměru 1.

[0,5b] 3. Je-li $z = \frac{3+2i}{1-i}$, pak je $\Re(z)$ (reálná část z) rovná:

(a) 0
(b) $\frac{5}{2}$
(c) $-\frac{1}{2}$
(d) $\frac{1}{2}$
(e) $-\frac{5}{2}$
(f) jinak

Komplexní číslo upravíme $z = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{3+2i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i-2}{1+1} = \frac{1}{2} + i\frac{5}{2}$. Je tudíž $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

[1b] 4. Definiční obor funkce $\sqrt{\ln(x+2)}$ je:

(a) $(-2, +\infty)$
(b) $[-1, +\infty)$
(c) $(0, +\infty)$
(d) $\{0\}$
(e) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$
(f) jinak

Je potřeba splnit dvě podmínky: argument logaritmu musí být větší než nula a argument odmocniny musí být větší nebo roven nule. Potřebujeme tedy

$$\begin{aligned} x+2 &> 0, \\ \ln(x+2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Z první nerovnosti plyne $x > -2$, z druhé $x \geq -1$, definiční obor funkce je tudíž $[-1, +\infty)$.

[1b] 5. Definiční obor funkce $((x-1)(x-2))^{\frac{3}{2}}$ je:

(a) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
(b) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
(c) $[0, \infty)$
(d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
(e) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$
(f) jinak

Argument funkce $y^{\frac{3}{2}}$ musí být nezáporný, je tudíž potřeba vyřešit rovnici

$$(x-1)(x-2) \geq 0,$$

což je snadné. Definiční obor funkce je tedy $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

[**2b**] 6. Doplňte tabulku. Uvažujte následující množiny pouze v $\mathbb{R}$, nikoliv v $\mathbb{R}^*$!

M	$\sup M$	$\inf M$	$\max M$	$\min M$
$\{1-e^{-n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$				
$\left\{\cos(x), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$				

Je zjevné, že

$$\lim_{n\to+\infty} (1-e^{-n}) = 1$$

a zároveň pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - e^{-n} < 1.$$

Supremum množiny M je tudíž 1 a maximum neexistuje. Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$, $n < m$ platí

$$1 - e^{-n} < 1 - e^{-m},$$

existuje tudíž minimum množniny M a je rovné $1 - e^{-0} = 0$ (přirozená čísla uvažujeme včetně nuly), infimum je pak pochopitelně rovno minimu.

Funkce cos zobrazuje interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na interval $(0, 1]$, z čehož je zřejmé, že maximum (a tudíž i supremum) je 1, minimum množiny M neexistuje a infimum je rovno 0.

[**1b**] 7. Funkce $\operatorname{sgn}(\sin x)$, kde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

je nespojitá v bodech:

(a) v celém $\mathbb{R}$

(b) nikde

(c) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(d) $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(e) 1

(f) jinak

Funkce sin je kladná na intervalech $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a záporná na intervalech $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, v krajních bodech těchto intervalů je nulová. Složená funkce $\operatorname{sgn}(\sin(x))$ je tudíž

$$\operatorname{sgn}(\sin(x)) = \begin{cases} +1 & x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ 0 & x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ -1 & \cup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \,. \end{cases}$$

Je zjevné, že tato funkce je nespojitá v bodech $x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (argumenty jsou stejné jako při diskusi nespojitosti funkce $\operatorname{sgn}(x)$).

[1b]

8. Limita

$$\lim_{x\to 1} (x-1) \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

je rovná:

(a) 1

(b) π

(c) 0

(d) $+\infty$

(e) neexistuje

(f) jinak

Pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zjevně platí, že

$$(x-1)\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \le \left|(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \le |x-1|,$$

je tudíž

$$-x+1 \le (x-1)\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \le x-1,$$

a protože $\lim_{x\to1}(x-1) = \lim_{x\to1}(-x+1) = 0$, plyne z věty o limitě sevřené funkce $\lim_{x\to1}(x-1)\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$.

[2,5b]

9. Uvažujte funkci $f(x) = \ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2 x)$.

i. Definiční obor funkce je:

(a) $(0, \pi)$

(b) $(-\pi, \pi)$

(c) $\mathbb{R}$

(d) $(0, \infty)$

(e) $\emptyset$
(f) jinak

ii. Funkce f je na svém definičním oboru:
(a) omezená
(b) neomezená

iii. Funkce f je na svém definičním oboru:
(a) lichá
(b) sudá
(c) ani lichá ani sudá

iv. Funkce f je na svém definičním oboru periodická s nejmenší periodou:
(a) π
(b) 2π
(c) $\frac{\pi}{2}$
(d) 1
(e) není periodická
(f) jinak

v. Funkce f je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$:
(a) rostoucí
(b) klesající
(c) ani rostoucí ani klesající

Argument funkce $\ln y$ musí být kladný, což je v tomto případě splněno pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboť $\frac{\pi}{100} > 0$ a obor hodnot funkce $\sin^2(x)$ je $[0, 1]$. Definiční obor je tudíž $\mathbb{R}$.

Funkce $f(x) = \ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2 x)$ je složením čtyř funkcí $f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$, kde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(x), \\ f_2(x) &= x^2, \\ f_3(x) &= \frac{\pi}{100} + x, \\ f_4(x) &= \ln(x). \end{aligned}$$

Funkce $f_1(x) = \sin(x)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval $[-1, 1]$, funkce $f_2(x) = x^2$ zobrazí tento interval na interval $[0, 1]$, posunutím $f_3(x) = \frac{\pi}{100} + x$ se interval $[0, 1]$ transformuje na interval $\left[\frac{\pi}{100}, 1 + \frac{\pi}{100}\right]$, konečně funkce $f_4(x)$ (protože je prostá a rostoucí) zobrazí tento interval na interval $\left[\ln\left(\frac{\pi}{100}\right), \ln\left(1 + \frac{\pi}{100}\right)\right]$. Funkce $f(x)$ je tudíž omezená.

Má-li být funkce lichá, musí platit

- Je-li $x \in D_f$, pak je i $-x \in D_f$.

- Pro každé $x \in D_f$ je splněna rovnost $-f(x) = f(-x)$.

Má-li být funkce sudá, musí platit

- Je-li $x \in D_f$, pak je i $-x \in D_f$.
- Pro každé $x \in D_f$ je splněna rovnost $f(x) = f(-x)$.

Víme-li, že funkce sin je lichá, snadno zjistíme, že

$$f(-x) = \ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2(-x)) = \ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2(x)) = f(x),$$

a funkce $f(x)$ je tudíž sudá.

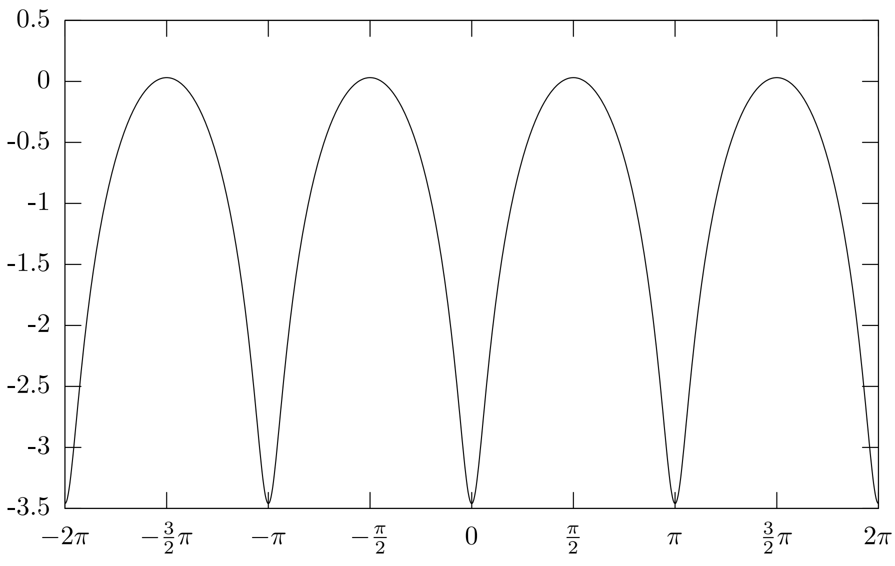
Hledáme nejmenší $d \in \mathbb{R}$ tak, aby pro každé $x \in D_f$ platilo $f(x+d) = f(x)$, tedy

$$\ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2(x)) = \ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2(x+d)).$$

Pro funkci sin platí $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, a nutně tedy platí i $\sin^2(x) = \sin^2(x+\pi)$. Funkce $f(x)$ je tudíž periodická s periodou π.

Funkce $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, 3$ jsou rostoucí na $\mathbb{R}$ a funkce $f_1(x) = \sin(x)$ je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí. Z toho plyne, že složená funkce $f(x)$ je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí.

Graf funkce $f(x)$ je na následujícím obrázku.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x)\ln(\frac{\pi}{100} + \sin^2(x))$