

Ortogonalní polynomy

1. Ukažte, že Hermitovy polynomy

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

řeší rovnici

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (\text{resp. } (y'e^{-x^2})' = -2ne^{-x^2}y).$$

Ukažte, že platí

$$\begin{aligned} xH_n(x) &= nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x) \\ H_n'(x) &= 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

2. Ukažte, že Laguerrovy polynomy

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

řeší rovnici

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (\text{resp. } (y'xe^{-x})' = -ne^{-x}y).$$

Ukažte, že

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k.$$

3. Ukažte, že Čebyševovy polynomy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ řeší rovnici

$$(y' \sqrt{1-x^2})' = -n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Rozviňte $f(x) = \text{sign}(x)$ na $(-1, 1)$ do Čebyševových polynomů.

5. Ukažte, že Legendreovy polynomy

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

řeší rovnici

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (\text{resp. } (y'(1-x^2))' = -n(n+1)y).$$

6. Rozviňte $f(x) = \text{sign}(x)$ na $(-1, 1)$ do Legendreových polynomů.

7. Kulová plocha poloměru a je rozdělena "rovníkem" na dvě polokoule. Na povrchu horní polokoule je konstantní potenciál $+V$, na povrchu dolní polokoule je potenciál $-V$. Určete elektrostatický potenciál vně i uvnitř koule.

8. Ukažte, že přidružené Legendreovy polynomy

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l, l \in \mathbb{N}_0$, řeší rovnici

$$(y'(1-x^2))' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0.$$

9. Dokažte, že platí

$$\int_{-1}^1 P_l^m P_l^m dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}.$$

10. Dokažte, že sférické funkce

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

splňují

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \bar{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$