Příklady na 5. týden

Funkce komplexní proměnné III

Cauchyova věta

1. Vypočtěte integrál $I = \int_\varphi |z|\overline{z}dz$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

2. Vypočtěte $I = \int_C \frac{z\mathrm{e}^z dz}{z^2+4}$. kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu 2i a poloměru 2.

3. Spočtěte
   a) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz$
   b) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1} dz$.

4. Spočtěte $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^z dz}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2.

5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \to 0$ když $z \to \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_\infty^\infty f(x)dx$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{\mathrm{i}\alpha-\infty}^{\mathrm{i}\alpha+\infty} f(x)dx$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α.

6. Dokažte:
   Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z-a| \le r_0$, $0 \le \arg(z-a) \le b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \le 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, potom $\lim_{r\to 0+} \int_{C_r} f(z)dz = \mathrm{i}Ab$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$, vyťatý úhlem $0 \le \arg(z-a) \le b$.

7. Spočtěte (použijte předchozí příklad)
   a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$
   b) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

8. Na okolí 0 rozviňte v mocninnou řadu a najděte poloměr konvergence
   a) $\cosh^2 z$ b) $\frac{1}{az+b}$, $b \neq 0$.

9. Na okolí 1 rozviňte v mocninnou řadu a najděte poloměr konvergence
   a) $\frac{z}{z^2-2z+5}$ b) $\sin(2z-z^2)$.