Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Skupina: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	4	4	12	10	30
Získáno					

[4] 1. Spočtěte

$$\int \frac{2^{\tan x}}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x,$$

pečlivě popište definiční obor integrandu f a vámi nalezené primitivní funkce F. Určete, kde platí vztah $F' = f$.

Řešení:

Integrand $\frac{2^{\tan x}}{1+\cos 2x}$ zřejmě není definován pro taková $x \in \mathbb{R}$, kde

$$1 + \cos 2x = 0,$$

tedy pro $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zároveň musí být argument integrandu v definičním oboru funkce $\tan x$. Definiční obor integrandu je tedy

$$\bigcup_{k \in Z} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Jednostranné limity v bodě $\frac{\pi}{2}$ jsou

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{2^{\tan x}}{1+\cos 2x} = 0,$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{2^{\tan x}}{1+\cos 2x} = +\infty,$$

integrand tedy nelze v případě potřeby spojitě dodefinovat v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Počítejme

$$\int \frac{2^{\tan x}}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2^{\tan x}}{1+\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2^{\tan x}}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2^{\tan x}}{1+\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{2^{\tan x}}{2}\left(1-\tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \tan x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left(1+u^2\right)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int 2^{u-1}\,\mathrm{d}u = \frac{2^{u-1}}{\ln 2} + C_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2^{\tan x - 1}}{\ln 2} + C_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)},$$

výpočet je pochopitelně platný pouze pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, na jiných intervalech by výpočet proběhl obdobně, integrační konstanta se všem může lišit interval od intervalu. Primitivní funkce je definována pro $\cup_{k \in Z} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, vztah $F' = f$, platí na každém z těchto intervalů.

[4] 2. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1+\sin\frac{1}{n}+\sin^2\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Řešení:

Uvědomíme si, že limitu posloupnosti můžeme počítat tak, že prozkoumáme limitu

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x}}-(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Uvedenou limitu spočteme kupříkladu takto

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x}}-(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}-e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}\frac{e^{\frac{1}{x}\left(\ln\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)-\ln(1+\sin x)\right)}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}\frac{e^{\frac{1}{x}\left(\ln\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}\right)\right)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}}\frac{e^{\frac{1}{x}\frac{\ln\left(\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1\right)+1\right)}{\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1}\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1\right)}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}}\frac{e^{x\frac{\ln\left(\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1\right)+1\right)}{\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1}\frac{\sin^2 x}{x^2}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}}\frac{e^{x\frac{\ln\left(\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1\right)+1\right)}{\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1}\frac{\sin^2 x}{x^2}}-1}{x\frac{\ln\left(\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1\right)+1\right)}{\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1}\frac{\sin^2 x}{x^2}}\left(\frac{\ln\left(\left(\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1\right)+1\right)}{\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}-1}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=e.$$

[12] 3. Vyšetřete průběh následujících funkce (definiční obor, obor hodnot, prostá, sudá nebo lichá, spojitost, body nespojitosti, limity v bodech nespojitosti, diferencovatelnost, spojitost derivace, limity derivace v bodech nespojitosti derivace, monotonie, konvexní, konkávní, lokální a globální extrémy, inflexní body, tečny v inflexních bodech, asymptoty, graf).

$$f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right).$$

Vlastnosti funkce je nutné jasně odůvodnit výpočtem, vyčíst vlastnosti (rostoucí, klesající, konvexní, konkávní a podobně) z grafu funkce nestačí a za takovéto odůvodnění nebudou přiděleny body.

Připomínáme: Funkce arccot je funkce inverzní k funkci $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ na intervalu $[0, \pi]$.

Řešení:

Funkce arccot je definovaná na $\mathbb{R}$, obor hodnot je $[0, \pi]$. Funkce

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

tedy není definována pouze pro $x = \pm 1$. Definiční obor je tedy $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Funkce je zjevně sudá, neboť

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-(-x)^2}\right),$$

funkce není periodická. Na svém definičním oboru je funkce spojitá (složení spojitých funkcí), limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to\pm1\pm} \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \pi,$$
$$\lim_{x\to\pm1\mp} \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Spočteme první derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ a je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $(1, +\infty)$. V bodě $x = 0$ máme podezření na extrém (v této chvíli již můžeme říci, a to aniž bychom vyšetřovali druhou derivaci, že stacionární bod $x = 0$ bude lokálním maximem). Hodnota funkce v bodě $x = 0$ je $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Limity derivace v bodech ± 1 jsou

$$\lim_{x\to\pm1\pm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right) = \lim_{x\to\pm1\pm} -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} = -2,$$
$$\lim_{x\to\pm1\pm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right) = \lim_{x\to\pm1\mp} -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} = +2.$$

Spočtěme druhou derivaci, jest

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\right)$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2+1}\right) = 2\frac{3x^4-2x^2-2}{\left(1-x^2\right)^2+1}.$$

Zjistěme, kde je druhá derivace nulová. Řešením kvadratické rovnice $3y^2 - 2y - 2$ jsou body $y_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$, přičemž kladný je pouze kořen $y_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$. Rovnice $3x^4 - 2x^2 - 2$ má tedy dva reálné kořeny a sice $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}$.

Z průběhu druhé derivace tudíž plyne:

$$f(x) \text{ je } \begin{cases} \text{konvexní}, & x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}\right), \\ \text{konkávní}, & x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}, -1\right), \\ \text{konkávní}, & x \in (-1, 1), \\ \text{konkávní}, & x \in \left(1, \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}\right), \\ \text{konvexní}, & x \in \left(\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}, +\infty\right). \end{cases}$$

Rovnice tečen v inflexních bodech jsou zřejmě

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

kde $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}}$. V tuto chvíli můžeme nakreslit graf funkce, viz Obrázek 1 a odečíst zbývající informace. Funkce není prostá, nemá maximum ani minimum (má však supremum – π a infimum – 0) . Obor hodnot je $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

[10] 4. Napiště obecný tvar Taylorova rozvoje (s Lagrangeovým tvarem zbytku) pro funkci f v bodě z_0. Najděte Taylorův rozvoj funkce

$$f(z) = \operatorname{arctanh} z,$$

do řádu $\mathrm{o}\left(z^2\right)$ v bodě $z_0 = 0$. Najděte Taylorův rozvoj funkce

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right),$$

do řádu $\mathrm{o}\left((z-1)^2\right)$ v bodě $z_0 = 1$. Užitím Taylorových rozvojů vhodných funkcí spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctanh}\left(e^x - 1 - x\right)}{x^4 + 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-x}\right)}$$

Řešení:

Obecný tvar Taylorova rozvoje je:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde $\xi \in (x_0, x)$.

Dosazením do výše uvedeného vzorce dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctanh} z &= \left.\operatorname{arctanh} z\right|_{z=0} + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{arctanh} z\right|_{z=0} z + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\operatorname{arctanh} z\right|_{z=0} z^2 + \mathrm{o}\left(z^2\right)\\ &= 0 + \left.\frac{1}{1-z^2}\right|_{z=0} z - \frac{1}{2}\left.\frac{2z}{\left(1-z^2\right)^2}\right|_{z=0} z^2 + \mathrm{o}\left(z^2\right) = z + \mathrm{o}\left(z^2\right).\end{aligned}$$

Odvozený vzorec zřejmě bude platit, správně nám vyšlo, že obsahuje pouze liché mocniny z, a to proto, že funkce $\operatorname{arctanh} z$ je lichá funkce. Stejný postup zopakujeme i pro druhou funkci

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) &= \left.\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right|_{y=1} + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right|_{y=1}(y-1) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right|_{y=1}(y-1)^2 + \mathrm{o}\left((y-1)^2\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2 = 1 - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2.\end{aligned}$$

Podívejme se tedy, jak bude vypadat kompletní Taylorův rozvoj funkce v čitateli, jest

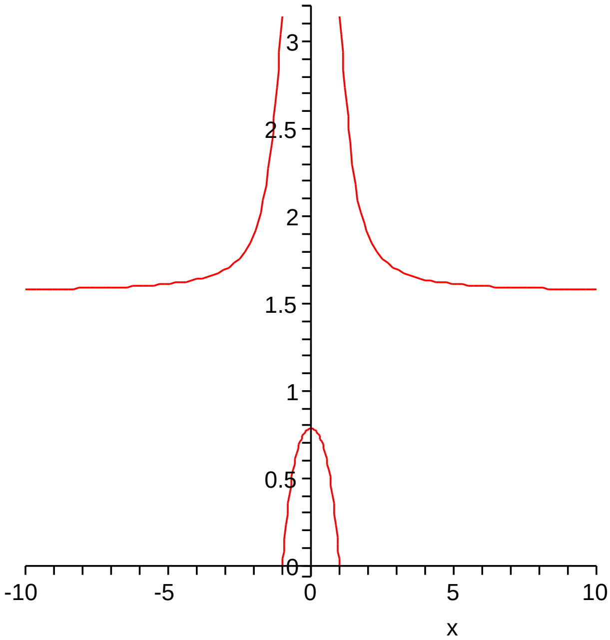
$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right),\\ e^x - 1 - x &= \frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right),\\ \operatorname{arctanh}\left(e^x - 1 - x\right) &= \left(\frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) + \mathrm{o}\left(x^2\right) = \frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Soustřeďme se nyní na jmenovatel, zjevně budeme potřebovat rozvoj do řádu x^2. Jest

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x),\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+x}\right) &= 1 - \frac{\pi^2}{8}\left(\sqrt{1+x} - 1\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8}\left(\left(1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)\right) - 1\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{32} + \mathrm{o}\left(x^2\right),\end{aligned}$$

celkem tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctanh}\left(e^x - 1 - x\right)}{x^4 + 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^4 + 1 - \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{32} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{\frac{\pi^2 x^2}{32} + \mathrm{o}\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{\pi^2}{32} + \frac{\mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^2}\right)} = \frac{16}{\pi^2}.$$



Obrázek 1: Graf funkce $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$.