Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	7	11	6	30
Získáno					

[6] 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{1}{n}}}.$$

Návod: Limitu lze převést na limitu $\lim_{x\to 0+} f(x)$, kde $f(x)$ je vhodná funkce.

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}\right)}{\ln\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}\right)-\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)+\ln\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}}.$$

Nyní vše závisí na limitním chování výrazu

$$\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right),$$

ukážeme, že

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\ln 2,$$

skutečně

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}+\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1+1=2,$$

neboť

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\frac{1}{\tan y}}=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos y}\sin y=\lim_{z\to 0+}\frac{z}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$
$$=\lim_{z\to 0+}\frac{z}{\cos\frac{\pi}{2}\cos z+\sin\frac{\pi}{2}\sin z}\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\lim_{z\to 0+}\frac{z}{\sin z}\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=1.$$

Celkem proto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n+\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)+\ln\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}}=e^{0+1}=e.$$

[7] 2. Spočtěte

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}\,\mathrm{d}x,$$

pečlivě popište definiční obor integrandu f a vámi nalezené primitivní funkce F. Určete, kde platí vztah $F' = f$.

Řešení:

Integrand je zjevně definován pro $x \in [0,+\infty)$. Počítejme

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \sqrt[4]{x} \\ \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{4y^4}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y.$$

Jest

$$\frac{y^4}{y^2+y+1} = y^2 - y + \frac{y}{y^2+y+1},$$

proto

$$\begin{aligned}\int \frac{y^4}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y &= \int \left(y^2 - y + \frac{y}{y^2+y+1}\right)\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{2y+1}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+y+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \ln\left|y^2+y+1\right| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \ln\left|y^2+y+1\right| - \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \ln\left|y^2+y+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

celkem tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}\,\mathrm{d}x &= 4\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \ln\left|y^2+y+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right| - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

Primitivní funkce je definována pro $x \in [0,+\infty)$, vztah $F' = f$ platí na otevřeném intervalu $(0,+\infty)$.

[11] 3. Vyšetřete průběh následujících funkce (definiční obor, obor hodnot, prostá, sudá nebo lichá, spojitost, body nespojitosti, limity v bodech nespojitosti, diferencovatelnost, spojitost derivace, limity derivace v bodech nespojitosti derivace, monotonie, konvexní, konkávní, lokální a globální extrémy, inflexní body, tečny v inflexních bodech, asymptoty, graf).

$$f(x) = \ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right).$$

Vlastnosti funkce je nutné jasně odůvodnit výpočtem, vyčíst vlastnosti (rostoucí, klesající, konvexní, konkávní a podobně) z grafu funkce nestačí a za takovéto odůvodnění nebudou přiděleny body.

Řešení:

Argument logaritmu musí být kladný, definiční obor funkce tedy bude obsahovat taková $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$1 - |x(1-x)| > 0,$$

absolutní hodnotu ve výše uvedeném výrazu odstraníme podle definice

$$|x(1-x)| = \begin{cases} -x(1-x), & x \in (-\infty, 0), \\ x(1-x), & x \in [0,1], \\ -x(1-x), & x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

je tedy nutné zajistit

$$\begin{aligned} 1 - x(1-x) > 0, &\text{ pokud } x \in [0,1], \\ 1 + x(1-x) > 0, &\text{ pokud } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \end{aligned}$$

první nerovnost je splněná vždy, druhá pouze pro $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Definiční obor zkoumané funkce je tudíž $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x \to \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \mp} \ln\left(1 - |x(1-x)|\right) = -\infty,$$

funkce je na svém definičním oboru spojitá (složení spojitých funkcí), není periodická, není sudá ani lichá. Můžeme si povšinout, že funkční hodota je rovná nule v bodech $x = 0$ a $x = 1$.

Spočteme první derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right)\right) = \begin{cases} \frac{-2x+1}{1+x(1-x)}, & x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \\ -\frac{-2x+1}{1-x(1-x)}, & x \in (0,1), \\ \frac{-2x+1}{1+x(1-x)}, & x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Derivace není definována v bodech $x = 0$ a $x = 1$, limity derivace jsou

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f'(x) &= \lim_{x \to 0-} \frac{-2x+1}{1 + x(1-x)} = 1, \\ \lim_{x \to 0+} f'(x) &= \lim_{x \to 0+} -\frac{-2x+1}{1 - x(1-x)} = -1, \end{aligned}$$

obdobně

$$\lim_{x \to 1\pm} f'(x) = \mp 1,$$

derivace je nulová v bodě $x = \frac{1}{2}$. Ze znaménka první derivace plyne, že

$$f(x) \text{ je } \begin{cases} \text{rostoucí}, & x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right], \\ \text{klesající}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \text{rostoucí}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ \text{klesající}, & x \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Z výše uvedeného plyne, že funkce bude mít lokální minimum v $x = \frac{1}{2}$. Je rovněž jasné, že funkce bude mít globální maximum v bodech $x = 0$ a $x = 1$ a hodnota funkce v těchto bodech je rovná 0.

Spočtěme druhou derivaci (nejprve na intervalu $(0,1)$)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{-2x+1}{1 - x(1-x)}\right) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{\left(1 - x(1-x)\right)^2},$$

derivace je zřejmě na uvedeném intervalu vždy kladná, a to proto, že polynom v čitateli má kořeny $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ a je tudíž kladný v intervalu $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ a zřejmě platí, že $(0,1) \subset \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Spočtěme druhou derivaci na zbývajících intervalech

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln\left(1-\left|x-x^2\right|\right)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-2x+1}{1+x\left(1-x\right)}\right) = \frac{-2x^2+2x-3}{\left(1+x\left(1-x\right)\right)^2},$$

polynom $-2x^2+2x-3$ nemá reálné kořeny, druhá derivace je tedy na zbývajících intervalech vždy záporná. Druhá derivace pochopitelně neexistuje v bodech $x=0$ a $x=1$.

Celkem

$$f(x) \text{ je } \begin{cases} \text{konkávní}, & x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right], \\ \text{konvexní}, & x \in [0,1], \\ \text{konkávní}, & x \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Máme dostatek informací k nakreslení grafu (viz Obrázek 1), z něhož vyčteme doposud neurčené charakteristiky. Funkce zřejmě není prostá a obor hodnot je $\mathcal{R}_f = (-\infty, 0]$.

[6] 4. Napiště obecný tvar Taylorova rozvoje (s Lagrangeovým tvarem zbytku) pro funkci $f(z)$ v bodě z_0. Najděte Taylorův rozvoj výrazu

$$\sqrt[3]{1+3x} - \cos\left(x\sqrt{2}\right)$$

do řádu $\mathrm{o}\left(x^2\right)$ pro $x \to 0$.

Aniž byste použili l'Hospitalovo pravidlo spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos\left(x\sqrt{2}\right)}{x^2}.$$

Řešení:

Vzorec pro rozvoj výrazu $(1+x)^m$ je

$$(1+z)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right),$$

kde $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$, v našem případě proto

$$\sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{1}{3}(3x) + \frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(3x)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) = 1 + x - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right),$$

rozvoj funkce $\cos z$ je

$$\cos z = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(z^{2n+1}\right),$$

proto

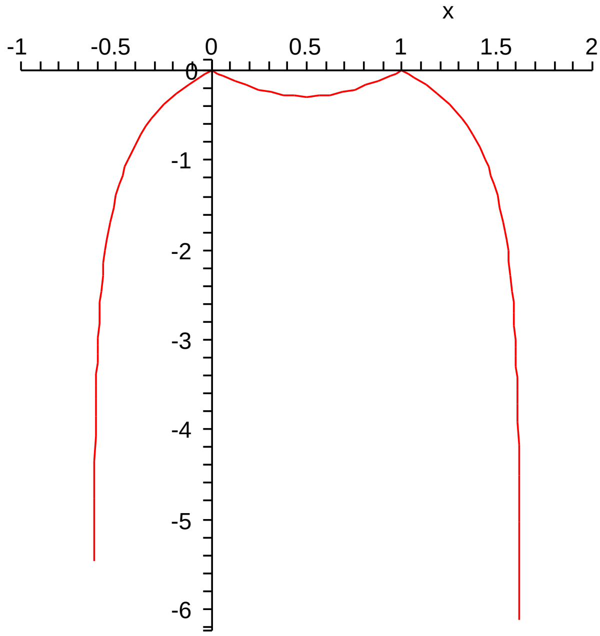
$$\cos\left(x\sqrt{2}\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x\sqrt{2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) = 1 - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Hledaný Taylorův rozvoj je tedy

$$\sqrt[3]{1+3x} - \cos\left(x\sqrt{2}\right) = \left(1 + x - x^2\right) - \left(1 - x^2\right) + \mathrm{o}\left(x^2\right) = x + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Nyní je snadné spočíst hledanou limitu, jest

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos\left(x\sqrt{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x + x + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^2} = 0.$$



Obrázek 1: Graf funkce $\ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right)$.