Z tohoto výrazu plyne

$$f_1(y,z) = y\,F_3(z) + f_4(z),$$
$$f_2(x,z) = -x\,F_3(z) + f_5(z). \qquad (7.1.22)$$

Třetí rovnice druhého sloupce soustavy (7.1.19) po dosazení z rovnic (7.1.20) vede na vztah

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z}. \qquad (7.1.23)$$

Do posledního vztahu dosadíme za $f_1(y,z)$ z rovnic (7.1.22) a dostaneme

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = -y\frac{\mathrm{d}F_3(z)}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}f_4(z)}{\mathrm{d}z}. \qquad (7.1.24)$$

Levá strana rovnice (7.1.24) je funkcí pouze x a y a proto derivace na pravé straně této rovnice musí být konstantní

$$\frac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}z} = k_1, \qquad \frac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}z} = k_2. \qquad (7.1.25)$$

Z posledních rovnic plyne

$$F_3 = k_1 z + k_3,$$
$$f_4 = k_2 z + k_4. \qquad (7.1.26)$$

Do rovnice (7.1.24) dosadíme z výrazů (7.1.26) a pak ji zintegrujeme, získáme

$$f_3(x,y) = -k_1 yx - k_2 x + f_6(y). \qquad (7.1.27)$$

Z druhé rovnice druhého sloupce soustavy (7.1.19) a rovnic (7.1.20) plyne

$$\frac{\partial f_2(x,z)}{\partial z} = -\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y}. \qquad (7.1.28)$$

Do poslední rovnice dosadíme za f_3 z rovnice (7.1.27) a pak za f_2 z rovnice (7.1.22), v níž F_3 vyjádříme dle (7.1.26), a dostaneme

$$-xk_1 + \frac{\mathrm{d}f_5(z)}{\mathrm{d}z} = k_1 x - \frac{\mathrm{d}f_6(y)}{\mathrm{d}y}. \qquad (7.1.29)$$

V této rovnici jsou jednotliví sčítanci funkcí různých nezávisle proměnných. K jejímu splnění je nutné položit

$$k_1 = 0, \qquad (7.1.30)$$

$$\frac{\mathrm{d}f_5(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}f_6(y)}{\mathrm{d}y} = k_5. \qquad (7.1.31)$$

Z poslední rovnice plyne

$$f_5(z) = k_5 z + k_6,$$
$$f_6(y) = -k_5 y + k_7. \qquad (7.1.32)$$

Z rovnic (7.1.22), (7.1.26), (7.1.27), (7.1.30) a (7.1.32) dostáváme pro funkce f_1, f_2 a f_3 vyjádření

$$f_1 = k_3 y + k_2 z + k_4,$$
$$f_2 = -k_3 x + k_5 z + k_6,$$
$$f_3 = -k_2 x - k_5 y + k_7. \qquad (7.1.33)$$

Dosazením z poslední soustavy rovnic do rovnic (7.1.20) dostáváme pro složky vektoru posunutí $\boldsymbol{u}(u, \upsilon, w)$ vztahy

$$u = e_{xx} x + k_3 y + k_2 z + k_4,$$
$$\upsilon = e_{yy} y - k_3 x + k_5 z + k_6,$$
$$w = e_{zz} z - k_2 x - k_5 y + k_7. \qquad (7.1.34)$$

Konstanty k_4, k_6 a k_7 představují translaci (posunutí) válce jako tuhého celku. Předpokládáme-li, že tento pohyb nenastane, a za bod, pro který je vektor posunutí nulový, zvolíme počátek soustavy souřadnic, viz obr. 7.1, bude platit $u = \upsilon = w = 0$ pro $x = y = z = 0$. Z těchto podmínek plyne $k_4 = k_6 = k_7 = 0$.

Konstanty k_2, k_3 a k_5 určují rotaci (otočení) válce jako tuhého celku, viz rovnici (4.2.17), $-\omega_i = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}$, tj. $\omega_1 = -k_5$, $\omega_2 = k_2$, $\omega_3 = -k_3$. Předpokládáme-li, že ani rotace válce nenastane, tj. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, a tedy $k_2 = k_3 = k_5 = 0$, nabývá řešení (7.1.34) konečného tvaru

$$u = e_{xx} x,$$
$$\upsilon = e_{yy} y,$$
$$w = e_{zz} z. \qquad (7.1.35)$$

Při vyšetřování deformace tělesa lze rovnice (7.1.35) pokládat za obecné vztahy pro složky vektoru posunutí částic homogenní izotropní válcové tyče namáhané tahem dle obr. 7.1.

7.2. Deformace válce vlastní vahou

Je dán homogenní (hustota ρ = konst) kolmý kruhový válec délky l, zavěšený ve středu A horní základny. Na válec působí pouze tíha. Máme určit deformaci válce, vyvolanou touto silou.

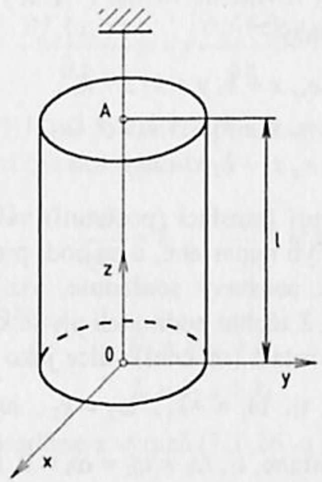
Počátek 0 souřadné soustavy položíme do středu spodní základny válce v nedeformovaném stavu a osa $x_3 \equiv z$, která splývá s podélnou osou válce, nechť míří svisle vzhůru (obr. 7.2). Pak osy $x_1 \equiv x$ a $x_2 \equiv y$ leží v rovině spodní základny. Jedinou objemovou silou je tíže, jejíž složky jsou

$$F_x = F_y = 0, \qquad F_z = -\rho g\,, \tag{7.2.1}$$

kde ρ je hustota válce a g tíhové zrychlení.

Nyní musíme určit vnější síly plošné. Na spodní základnu nepůsobí žádná plošná síla, takže vektor napětí je nulový

$$\overset{-z}{T}_x = \overset{-z}{T}_y = \overset{-z}{T}_z = 0 \quad \text{pro } z = 0. \tag{7.2.2}$$



Obr. 7.2

(Symbol $-z$ nad T znamená, že jde o normálu ve směru záporné osy z.) Na plášť válce nepůsobí žádné plošné síly, tj. pro plášť válce

$$\overset{\nu}{T}_i = 0\,. \tag{7.2.3}$$

Na horní základně válce působí v bodě A závěsu síla, která udržuje válec v rovnováze. Tato síla míří svisle vzhůru a její velikost je rovna tíze válce $F_z = -\rho g V$, kde V je objem válce. Předpokládáme-li nyní místo této „ostré" okrajové podmínky, která vystihuje skutečné poměry, že působení uvedené síly je rozloženo rovnoměrně po celé ploše horní základny, což je pro výpočet jednodušší (zmírnění okrajových podmínek užitím principu Saint-Venantova), máme

$$\overset{z}{T}_x = \overset{z}{T}_y = 0\,, \; \overset{z}{T}_z = \rho g l \quad \text{pro } z = l. \tag{7.2.4}$$

Všechny vnější podmínky máme nyní formulovány analyticky a můžeme přikročit k vlastnímu řešení.

Uvnitř válce musíme splnit podmínky rovnováhy (3.3.3), tj. soustavu rovnic

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0\,,$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0\,,$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g = 0\,. \tag{7.2.5}$$

Na obou základnách a na plášti válce musí řešení této soustavy rovnic splňovat okrajové podmínky (5.6.3), které mají, jsou-li rozepsány, tento tvar

$$\tau_{xx}\cos(\nu,x) + \tau_{yx}\cos(\nu,y) + \tau_{zx}\cos(\nu,z) = \overset{\nu}{T}{}^{*}_x\,,$$
$$\tau_{xy}\cos(\nu,x) + \tau_{yy}\cos(\nu,y) + \tau_{zy}\cos(\nu,z) = \overset{\nu}{T}{}^{*}_y\,,$$
$$\tau_{xz}\cos(\nu,x) + \tau_{yz}\cos(\nu,y) + \tau_{zz}\cos(\nu,z) = \overset{\nu}{T}{}^{*}_z\,. \tag{7.2.6}$$

Pro spodní základnu vzhledem k (7.2.2) odtud plyne (jelikož $\cos(\nu,x) = \cos(\nu,y) = 0, \cos(\nu,z) = -1$)

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{zz} = 0 \quad \text{pro } z = 0. \tag{7.2.7}$$

A pro horní základnu s přihlédnutím k (7.2.4) máme

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0\,, \quad \tau_{zz} = \rho g l \quad \text{pro } z = l. \tag{7.2.8}$$

Jelikož normála libovolné plošky na plášti válce je kolmá k ose z, je $\cos(\nu,z) = 0$ a rovnice (7.2.6) se pro plášť válce zredukují na tvar

$$\tau_{xx}\cos(\nu,x) + \tau_{yx}\cos(\nu,y) = 0\,,$$
$$\tau_{xy}\cos(\nu,x) + \tau_{yy}\cos(\nu,y) = 0\,,$$
$$\tau_{xz}\cos(\nu,x) + \tau_{yz}\cos(\nu,y) = 0\,, \tag{7.2.9}$$

kde $\cos(\nu,x)$ a $\cos(\nu,y)$ nabývají všech hodnot od -1 do $+1$.

Hledané řešení rovnic (7.2.5) má tedy splňovat okrajové podmínky (7.2.7), (7.2.8) a (7.2.9). Přitom stačí nalézt jedno řešení, neboť jsme si ukázali, že existuje-li řešení rovnic klasické teorie pružnosti, je to řešení jediné. Uvědomíme-li si, že uvažovaný problém je symetrický vzhledem k podélné ose válce, která splývá s osou z, a uvážíme-li vliv této symetrie na podmínky (7.2.9), je přijatelné, požadujeme-li, aby na plášti válce platilo

$$\tau_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{yy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\,, \tag{7.2.10}$$

čímž jsou podmínky (7.2.9) splněny identicky.

V dalším řešení naší úlohy zkusme předpokládat, že rovnice (7.2.10) platí v celém objemu válce. Pak ze soustavy rovnic (7.2.5) zbývá rovnice

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho g\,,$$

jejímž řešením je

$$\tau_{zz} = \rho g z + f(x, y)\,.$$

Toto řešení musí splňovat podmínky na obou základnách válce, tj.

$$\tau_{zz} = 0 \quad \text{pro} \quad z = 0\,,\ \tau_{zz} = \rho g l \quad \text{pro}\ z = l\,.$$

Odtud vidíme, že musíme položit $f(x, y) = 0$. Hledaným řešením je tedy

$$\tau_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{yy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\,, \quad \tau_{zz} = \rho g z\,. \tag{7.2.11}$$

Lze se přesvědčit, že toto řešení splňuje podmínky rovnováhy (7.2.5), okrajové podmínky (7.2.7), (7.2.8), (7.2.9) i podmínky kompatibility v napětích (5.5.7).

Poznámka: Uvedený postup je jednoduchým příkladem užití tzv. *Saint-Venantovy semiinverzní metody*. Při této metodě se pro některé složky napětí, popř. posunutí, předpokládá závislost určitého tvaru, a to taková, aby měla dost volnosti pro dodatečné splnění všech podmínek úlohy. Tuto metodu ještě použijeme později, hlavně při řešení problémů torze a ohybu tyčí.

Nyní určíme složky posunutí $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv \upsilon$, $u_3 \equiv w$, příslušné napětím (7.2.11). Dosadíme-li složky napětí (7.2.11) do Hookova zákona (5.3.30), vypočítáme složky tenzoru deformace e_{ij} ($e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$), takže naší úlohou je integrovat soustavu rovnic

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sigma \rho g}{E} z\,, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -\frac{\sigma \rho g}{E} z\,, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\rho g}{E} z\,, \tag{7.2.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0\,. \tag{7.2.13}$$

Integrací poslední rovnice ze (7.2.12) dostáváme

$$w = \frac{\rho g}{2E} z^2 + w_0(x, y)\,, \tag{7.2.14}$$

kde $w_0(x, y)$ je funkcí pouze x a y. Zavedením tohoto výsledku do druhé a třetí rovnice (7.2.13) dospíváme k rovnicím

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}\,.$$

Jejich integrací obdržíme

$$u = -z\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0(x, y)\,, \quad \upsilon = -z\frac{\partial w_0}{\partial y} + \upsilon_0(x, y)\,, \tag{7.2.15}$$

kde u_0 a υ_0 jsou opět funkcemi pouze x a y. Dosadíme-li právě získané výrazy pro u a υ do první a druhé rovnice (7.2.12) a do první rovnice (7.2.13), tj. do rovnic, které jsme ještě nepoužili, dostáváme

$$-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\sigma \rho g}{E} z\,,$$

$$-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \upsilon_0}{\partial y} = -\frac{\sigma \rho g}{E} z\,,$$

$$-2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_0}{\partial x} = 0\,.$$

Tyto rovnice mají být splněny pro každé z (ovšem z intervalu $(0, l)$). Jelikož jak u_0, tak υ_0 na z nezávisí, plyne z předchozích rovnic

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\sigma \rho g}{E}\,, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\sigma \rho g}{E}\,, \quad \frac{\partial \upsilon_0}{\partial y} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_0}{\partial x} = 0\,. \tag{7.2.16}$$

Z těchto rovnic je zase zřejmé, že u_0 je pouze funkcí y a υ_0 pouze funkcí x. Označíme-li $u_0 = f(y)$, $\upsilon_0 = g(x)$, plyne z poslední rovnice vztah

$$\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,.$$

Levá strana je zde pouze funkcí y a pravá strana pouze funkcí x. Aby tato rovnice byla splněna pro každé v úvahu přicházející x a y, musí se levá i pravá strana rovnat téže konstantě, kterou označíme α. Je tedy

$$\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} = \alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -\alpha\,,$$

odtud integrací dostáváme

$$u_0 = f(y) = \alpha y + a\,,\ \ \upsilon_0 = g(x) = -\alpha x + b\,;$$

a a b jsou integrační konstanty. Konečně integrací tří zbývajících rovnic soustavy (7.2.16) dostaneme

$$w_0 = \frac{\sigma\rho g}{2E}(x^2+y^2) + \alpha' x + \beta' y + c\,,$$

kde α', β' a c jsou konstanty. Zavedením tohoto výsledku do rovnic (7.2.14) a (7.2.15) dostáváme pro složky vektoru posunutí vyjádření

$$u = -\frac{\sigma\rho g}{E}xz + \alpha y - \alpha' z + a\,,$$

$$\upsilon = -\frac{\sigma\rho g}{E}yz - \alpha x - \beta' z + b\,,$$

$$w = \frac{\rho g}{2E}[z^2 + \sigma(x^2+y^2)] + \alpha' x + \beta' y + c\,. \qquad (7.2.17)$$

Konstanty a, b, c tohoto řešení charakterizují translaci (posunutí) tělesa jako tuhého celku a konstanty α, α', β' charakterizují jeho rotaci. Válec je však zavěšen tak, aby tyto pohyby nenastaly. Dle zadání úlohy se poloha bodu závěsu $A(0, 0, l)$ nemění, takže musí platit $u = \upsilon = w = 0$ pro $x = y = 0$, $z = l$. Z těchto podmínek plyne

$$0 = -\alpha' l + a\,,\quad 0 = -\beta' l + b\,,\quad 0 = \frac{\rho g l^2}{2E} + c\,.$$

Ze symetrie úlohy je vidět, že ani rotace nenastane. Abychom vyloučili rotaci kolem osy procházející bodem A rovnoběžně s osou x nebo s osou y, musíme předpokládat, že elementární úsek osy z v okolí bodu A zůstane pevným, tj. $\omega_x = \omega_y = 0$ pro $x = y = 0$, $z = l$. Z těchto podmínek plyne, že $\beta' = 0$, $\alpha' = 0$. K rotaci kolem osy z nedojde, bude-li elementární ploška v rovině xz a procházející bodem A pevná, tj. $\omega_x = 0$ pro $x = y = 0$, $z = l$. To vede k relaci $\alpha = 0$. Uplatněním těchto výsledků v podmínkách pro vymizení translace válce, dostaneme

$$a = 0\,,\quad b = 0.$$

Pro složky vektoru posunutí (deformace) zavěšeného válce namáhaného vlastní vahou získáme výrazy v konečném tvaru

$$u = -\frac{\sigma\rho g}{E}xz\,,$$

$$\upsilon = -\frac{\sigma\rho g}{E}yz\,,$$

$$w = \frac{\rho g}{2E}[z^2 - l^2 + \sigma(x^2+y^2)]\,. \qquad (7.2.18)$$

Body ležící na ose z, tj. na ose válce (pro něž je $x = y = 0$) se posunují jen ve směru vertikálním, všechny ostatní body i ve směru horizontálním. Bod na ose válce se posune o

$$w_0 = -\frac{\rho g}{2E}(l^2 - z^2)\,.$$

Body, které před deformací ležely v průřezu kolmém k ose válce, tj. $z = z_0$, leží při deformaci na ploše

$$z = z_0 + w = z_0 + \frac{\rho g}{2E}[z_0^2 - l^2 + \sigma(x^2+y^2)]\,,$$

tedy průřez před deformací kolmý k ose válce je při deformaci rotačním paraboloidem. Jeho body vzdálené od osy leží výše než vrchol paraboloidu, který je na ose válce. Z prvních dvou rovnic plyne, že posunutí ve směru radiálním $|u_r| = (u^2 + \upsilon^2)^{1/2}$ je rovné

$$u_r = -\frac{\sigma\rho g}{E}zr\,,$$

tj. směřuje k ose válce s výjimkou bodů ve spodní podstavě, kde je nulové. Kromě této podstavy se válec v celé délce zúží.

Body, které před deformací ležely na přímkách rovnoběžných s osou z (r_0 = konst), leží při deformaci opět na jediné přímce, která je skloněna k ose z. Pokud byla rovnice přímky před deformací

$$x = x_0\,,\quad y = y_0\,,$$

máme při deformaci

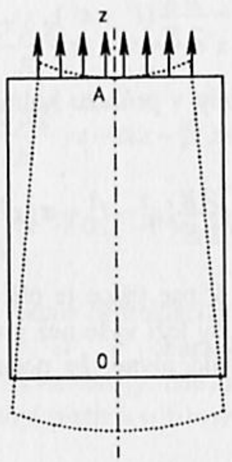
$$x = x_0 + u = x_0\left(1 - \frac{\sigma\rho g}{E}z\right),$$

$$y = y_0 + \upsilon = y_0\left(1 - \frac{\sigma\rho g}{E}z\right), \qquad (7.2.19)$$

což je také rovnice přímky. Průmět této přímky do roviny xy prochází počátkem, takže přímka (7.2.19) leží v rovině proložené osou z. Pro průsečík této přímky s osou z plyne

$$z = \frac{E}{\sigma \rho g},$$

takže všechny přímky, které před deformací byly rovnoběžné s osou z, procházejí při deformaci týmž bodem na ose z. Souosé kruhové válcové plochy v ose z přecházejí tedy touto deformací v souosé plochy kuželové se společným vrcholem. Na obrázku 7.3 je osový řez válcem při deformaci.



Obr. 7.3

7.3. Rozložení napětí v kulové skořepině a válcové rouře, na které působí rovnoměrný vnitřní a vnější tlak

Uvažujme skořepinu, která je omezena dvěma soustřednými kulovými plochami. Na vnější, jejíž poloměr je a, působí rovnoměrný tlak p_0 a na vnitřní o poloměru b rovnoměrný vnitřní tlak p_1. Máme určit normálové napětí na vnitřní plošce skořepiny kolmé k poloměru a na libovolné plošce, jejíž rovina prochází středem skořepiny. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že na skořepinu nepůsobí žádné objemové síly, tj. položíme $F_i = 0$.

Při řešení této úlohy vycházíme z rovnice rovnováhy ve složkách posunutí, kterou dostaneme z rovnice (5.7.3) vynecháním sil setrvačnosti (tj. pravé její strany) a sil objemových

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = 0. \tag{7.3.1}$$

Vzhledem ke kulové symetrii problému budeme předpokládat, že výsledná deformace má směr radiální a že je pouze funkcí vzdálenosti r od středu skořepiny. Položíme-li počátek souřadné soustavy do středu skořepiny, můžeme pro složky posunutí psát

$$u_i = \varphi^*(r)\cos(x_i, r) = \varphi^*(r)\frac{x_i}{r} = \varphi(r)x_i, \tag{7.3.2}$$

kde

$$r^2 = x_i x_i.$$

Nyní zavedeme předpoklad (7.3.2) o složkách posunutí do rovnice (7.3.1). Jelikož

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \varphi''(r)\frac{x_i x_j x_k}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r}\left(\delta_{ij}x_k + \delta_{jk}x_i + \delta_{ki}x_j - \frac{x_i x_j x_k}{r^2}\right),$$

kde čárkou je naznačena derivace podle r, dostáváme pro $\Delta u_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$ a pro $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}$ týž výraz, tj.

$$\Delta u_i = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = x_i\left[\varphi''(r) + \frac{4}{r}\varphi'(r)\right].$$

Tím rovnice (7.3.1) nabývá tvaru

$$(\lambda + 2\mu)x_i\left[\varphi''(r) + \frac{4}{r}\varphi'(r)\right] = 0,$$

z něhož plyne (ježto $\lambda > 0$, $2\mu > 0$ a x_i nejsou vesměs nulová v žádném bodě uvažované skořepiny), že φ je určeno rovnicí

$$\varphi''(r) + \frac{4}{r}\varphi'(r) = 0. \tag{7.3.3}$$

Integrace této rovnice je snadná. Položíme-li $\varphi'(r) = \psi(r)$, integrál rovnice

$$\psi'(r) + \frac{4}{r}\psi(r) = 0$$

se rovná

$$\psi = \varphi' = \frac{C}{r^4}$$