Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Uvažujte pohyb bodové častice, který je popsán standardním Newton zákonem ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

kde m je hmotnost částice, $\mathbf{x}$ její polohový vektor a $\mathbf{F}$ je působící síla. Předpokládejte, že působící síla má potenciál, to jest že existuje skalární funkce $\varphi(\mathbf{x})$ tak, že

$$\mathbf{F} =_{\mathrm{def}} -\nabla\varphi.$$

Ukažte, že veličina

$$E =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \varphi$$

je konstantní, aneb

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Představte si, že nyní částici sledujeme ve vztažné soustavě S', která se vůči původní vztažné soustavě, ve které platí (1), pohybuje rovnoměrně přímočaře, aneb pro polohové vektory platí

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{w}t, \tag{2}$$

kde $\mathbf{w}$ je libovolný konstantní vektor. Ukažte, že v nové vztažné soustavě opět platí

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}'),$$

což je tvrzení o invarianci pohybového zákona vůči volbě (inerciální) vztažné soustavy. (Invariancí rozumíme "zachování tvaru" pohybového zákona.) Ukažte, že veličina E' definovaná jako

$$E' =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \varphi$$

je opět konstantní, to jest

$$\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t} = 0.$$

2. Nyní si vyzkoušejte obrácený postup. Představte si, že vyžadujete, aby veličina

$$E =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \varphi \tag{3}$$

byla konstantní, to jest aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4}$$

bez ohledu na to, v jaké inerciální vztažné soustavě výpočet provedeme. (To jest aby platilo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \varphi\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \varphi\right) = 0$, kdykoliv mezi oběma vztažnými soustavami existuje vztah typu (2), kde $\mathbf{w}$ je libovolný vektor.) Ukažte, že tento požadavek implikuje platnost pohybového zákona ve tvaru (1).