KLASICKÉ ÚLOHY V MECHANICE KONTINUA – ZKOUŠKOVÉ PŘÍKLADY

VÍT PRŮŠA

Problém 1. *Uvažujte následující systém obyčejných diferenciálních rovnic pro $t \geq 0$,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mathrm{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\mathrm{Re}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

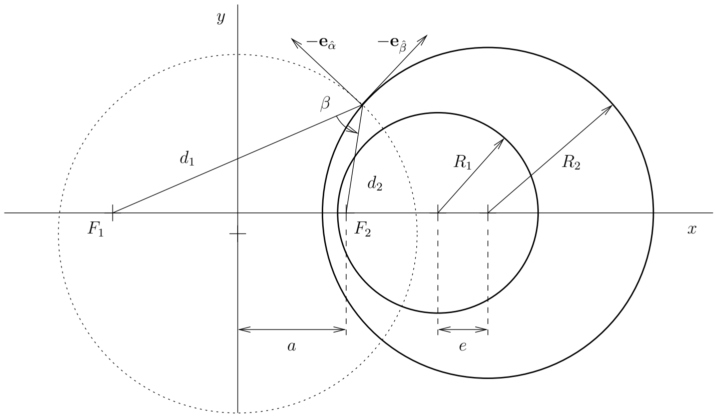
Ukažte, že $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ *je (stacionární) řešení daného problému. Vyšetřete metodami linearizované teorie stability stabilitu tohoto stacionárního řešení. Ukažte, že*

(1) vlastní čísla příslušného lineárního operátoru jsou záporná pro jakékoliv (kladné) Reynoldsovo číslo Re,
(2) poruchy jdou k nule—vysvětlete, co se tím myslí—pro $t \to +\infty$,
(3) poruchy mohou přechodně (pro malé časy t) růst.

Nyní uvažujte plně nelineární systém. Ukažte, že

(1) existuje Reynoldsovo číslo Re *(malé), takové, že* jakákoliv *porucha stacionárního řešení jde k nule pro $t \to +\infty$,*
(2) existuje Reynoldsovo číslo Re *(velké) a počáteční podmínka* $\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, *taková, že porucha vycházející z této počáteční podmínky* nekonverguje *k nule pro $t \to +\infty$. (Systém můžete vyřešit numericky.)*

Dokázali byste načrtnout fázový portrét pro uvažovaný systém? Co všechno z něj dokážete vyčíst? Jak se fázový portrét mění s rostoucím Re*?*



Obrázek 1. Bipolární souřadný systém.

Problém 2. *Uvažujte bipolární souřadný systém v $\mathbb{R}^2$, viz Obrázek 1. Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a bipolárními souřadnicemi α, β je*

$$x = \frac{a\sinh\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta}, \qquad y = \frac{a\sin\beta}{\cosh\alpha - \cos\beta}.$$

přičemž $\beta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ a a je daný parametr. Ukažte, že souřadnicové křivky, to jest křivky $\beta = \mathrm{const.}$ *a* $\alpha = \mathrm{const.}$ *jsou dány implicitními rovnicemi*

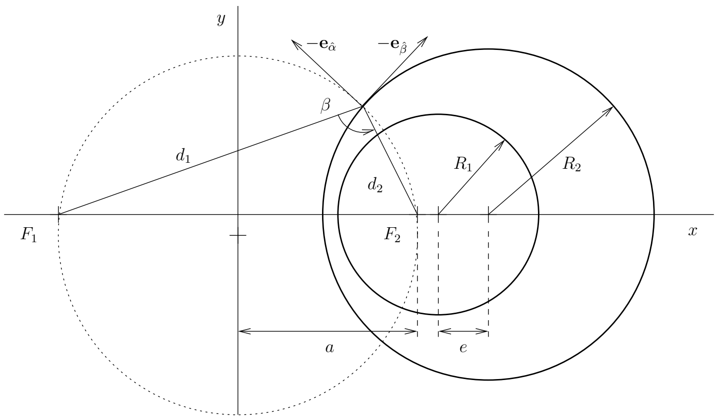
$$(x - a\coth\alpha)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\alpha}, \qquad x^2 + (y - a\cot\beta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\beta}.$$

Najděte tečné vektory k těmto křivkám a označte je $\boldsymbol{e}_\alpha$ a $\boldsymbol{e}_\beta$. Najděte složky metrického tenzoru g_{ij} a ukažte, že Christoffel symboly ${\Gamma^\alpha}_{\alpha\alpha}$ a ${\Gamma^\beta}_{\beta\beta}$ jsou dány vztahy

$${\Gamma^\alpha}_{\alpha\alpha} = -\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta}, \qquad {\Gamma^\beta}_{\beta\beta} = -\frac{\sin\beta}{\cosh\alpha - \cos\beta},$$

přičemž pro zbývající Christoffel symboly platí ${\Gamma^\beta}_{\alpha\beta} = {\Gamma^\alpha}_{\alpha\alpha}$, ${\Gamma^\alpha}_{\beta\beta} = -{\Gamma^\alpha}_{\alpha\alpha}$, ${\Gamma^\beta}_{\alpha\alpha} = -{\Gamma^\beta}_{\beta\beta}$, ${\Gamma^\alpha}_{\alpha\beta} = {\Gamma^\beta}_{\beta\beta}$. Najděte vztah pro $\Delta\phi$. (Laplace operátor působící na skalární funkci.)

Poznámka (9. června 2015, Petr Pelech): Původní obrázek k bipolárnímu souřadnicovému systému je špatně, správný obrázek je přiložen níže.



Obrázek 2. Bipolární souřadný systém – oprava.