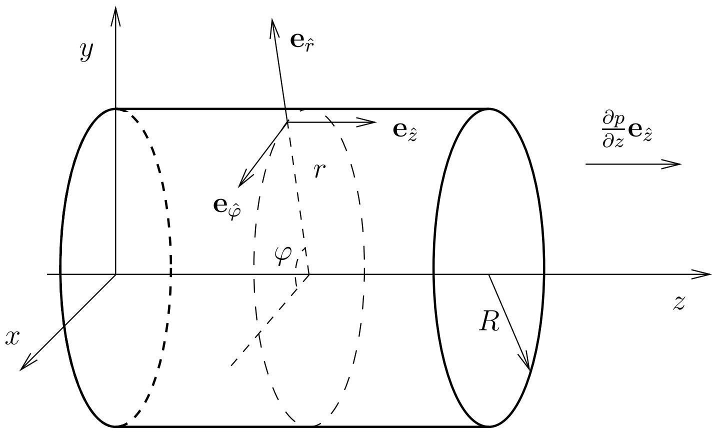
Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Uvažujte proudění trubici kruhového průřezu o poloměru R, viz Obrázek 1, které je buzené konstatním tlakovým gradientem $\tilde{\Delta}$ ve směru osy z, $\nabla p = -\tilde{\Delta}\mathbf{e}_{\hat{z}}$.



Obrázek 1: Trubice.

Tekutina proudící trubicí je standarndí nestlačitelná Navier–Stokes tekutina, aneb vztah mezi Cauchy tensorem napětí $\mathbb{T}$ a kinematickými veličinami je

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}, \tag{1}$$

kde μ je konstanta a $\mathbb{D} =_{\text{def}} \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\top}\right)$ značí symetrickou část gradientu rychlosti.

1. Rovnice popisující proudění jsou

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2a}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v}. \tag{2b}$$

   Najděte explicitní vyjádření rovnic (2) v cylindrických souřadnicích

$$x = r\cos\varphi, \tag{3a}$$

$$y = r\sin\varphi, \tag{3b}$$

$$z = z. \tag{3c}$$

2. Uvažujte ustálené proudění, $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Předpokládejte, že okrajová podmínka na stěnách trubice je $\mathbf{v}|_{r=R} = \mathbf{0}$. Ukažte, že pokud předpokládáme, že rychlostní pole v trubici má tvar

$$\mathbf{v} = v^{\hat{z}}(r)\mathbf{e}_{\hat{z}}, \tag{4}$$

   pak se systém rovnic (2) zapsaný v cylindrických souřadnicích zjednoduší na jednu obyčejnou diferenciální rovnici pro $v^{\hat{z}}$. Tuto rovnici vyřešte.