

rovná Γ . Pro určitou kružnici ($r = \text{konst}$) s rostoucím časem cirkulace Γ_r klesá a stejně klesá i rychlost v . Dochází tedy k utlumení pohybu. To je vidět i z toho, že pro libovolnou kružnici při $t \rightarrow \infty$ bude $v \rightarrow 0$. Pokud jde o intenzitu víru, není její časový průběh v určitém místě monotónní. Z druhé rovnice (18.7.16) zjistíme, že Ω nabývá maximální hodnoty rovné $\Omega_{\max} = \frac{\Gamma}{\pi r^2 e}$ v čase $t = \frac{r^2}{4\nu}$.

Ve všech kružnicích o poloměru r roste nejprve Ω od nuly k hodnotě Ω_{\max} a po jejím dosažení zase klesá k nule.

18.8.* Translace koule ve viskózní tekutině. Stokesův vzorec

Integrace tří Navierových–Stokesových rovnic je velmi obtížná. Je to zaviněno hlavně tím, že to jsou rovnice nelineární (stejně jako rovnice Eulerovy, ovšem navíc jsou zde členy příslušné viskozitě). Předešlé případy, kdy jsme mohli uvést jejich exaktní řešení, se vyznačovaly tím, že při zvolené formě pohybu nám z rovnic vypadly nelineární členy $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Je ovšem poměrně velmi málo

skutečných pohybů viskózní tekutiny, při kterých je rozložení rychlostí takové, že tyto členy vypadnou.

Snažíme se proto nalézt řešení přibližná. Ukazuje se, že to je možné ve dvou krajních případech, a to je-li Reynoldsovo číslo R buď velmi malé, anebo velmi velké. V tomto odstavci si všimneme blíže případu prvního.

Jak snadno seznáme, vyjadřuje Reynoldsovo číslo v charakteristických veličinách poměr síly setrvačnosti k síle vnitřního tření. Je-li Reynoldsovo číslo velmi malé, tj.

$$R = \frac{va}{\nu} \ll 1, \quad (18.8.1)$$

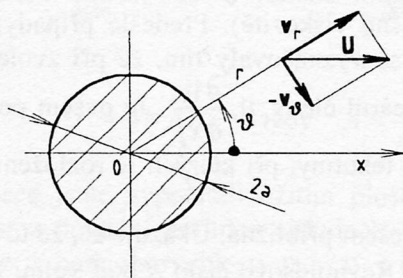
znamená to, že můžeme v přibližném výpočtu buď úplně zanedbat, anebo určitým způsobem „linearizovat“ členy příslušné síle setrvačnosti (například místo výrazu $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ zavést „linearizované“ proudové zrychlení $V_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, kde V_j jsou složky konstantní rychlosti, například v „nekonečnu“ apod.). Z vyjádření Reynoldsova čísla je také zřejmé, pro které hodnoty charakteristických veličin bude podmínka (18.8.1) splněna.

Za předpokladu, že je splněna podmínka (18.8.1), vyšetříme nyní rovnoměrný přímočarý pohyb koule ve viskózní nestlačitelné tekutině. Předpokládejme, že se koule pohybuje ve směru záporné osy x konstantní rychlostí U tekutinou, která je v klidu. Tuto úlohu můžeme formulovat tak, že koule je v klidu a že je obtékána tekutinou, jejíž rychlost v nekonečnu je U . Jelikož tekutina lne ke

kouli, je její rychlost na povrchu koule nulová. Za těchto podmínek máme určit rozložení rychlostí (tedy pole rychlosti) a velikost síly, kterou musíme působit na kouli, aby byla v klidu.

Počátek kartézské soustavy souřadnic zvolíme ve středu klidné koule a osa x necht' splývá se směrem rychlosti tekutiny v „nekonečnu“. Rozložení rychlostí ve všech rovinách proložených osou x bude zřejmě stejné, tj. náš uvažovaný problém je osově symetrický. Zavedeme-li si sférické souřadnice r, ϑ, φ , znamená to, že se složka rychlosti v_φ rovná nule a že dvě zbývající složky rychlosti v_r a v_ϑ nebudou funkcemi úhlu φ (obr. 18.5). Jelikož pak je proudění stacionární, nebudou tyto složky rychlosti ani funkcemi času t . Stejná podmínka bude platit i pro tlak p , takže pro další postup předpokládáme

$$v_r = v_r(r, \vartheta), \quad v_\vartheta = v_\vartheta(r, \vartheta), \quad v_\varphi = 0, \quad p = p(r, \vartheta). \quad (18.8.2)$$



Obr. 18.5

Za těchto předpokladů Navierovy–Stokesovy rovnice v kulových (sférických) souřadnicích, zanedbáváme-li objemové síly, mají tvar (odvoláváme se na příklad XVIII.1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\vartheta^2 + v_\varphi^2}{r} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 v_r}{r^2} - \frac{2 v_\vartheta \cotg \vartheta}{r} \right), \\ & \frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cotg \vartheta}{r} \\ &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Bigg), \\
& \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\vartheta v_\varphi \cotg \vartheta}{r} \\
& = -\frac{1}{\rho r \sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right). \quad (18.8.3)
\end{aligned}$$

Již dříve jsme si uvedli v kulových (sférických) souřadnicích rovnici kontinuity (viz (13.1.23)), kterou pro nestlačitelnou tekutinu lze psát takto

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\vartheta \cotg \vartheta}{r} = 0.$$

Vzhledem k (18.8.2) je třetí z Navierových–Stokesových rovnic splněna identicky, zbylé dvě rovnice a rovnice kontinuity se redukují na

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v_\vartheta \cotg \vartheta}{r^2} \right), \\
\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right), \\
0 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\vartheta \cotg \vartheta}{r}. \quad (18.8.4)
\end{aligned}$$

Tato soustava rovnic je uzavřená, neboť máme tři rovnice pro tři hledané funkce v_r , v_ϑ , p .

Okrajové podmínky příslušné této soustavě rovnic musí vyjadřovat údaje o tekutině v nekonečnu a na povrchu koule. V zavedené soustavě souřadnic, viz obr. 18.5, bude platit

$$v_r = U \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = -U \sin \vartheta \quad \text{pro} \quad r \rightarrow \infty. \quad (18.8.5)$$

Na povrchu koule musí v_r a v_ϑ při libovolném ϑ splňovat rovnice

$$v_r = 0, \quad v_\vartheta = 0 \quad \text{pro} \quad r = a, \quad (18.8.6)$$

kde a je poloměr koule. O všech třech hledaných funkcích bychom mohli předpokládat, že každá je rovna součinu dvou funkcí, z nichž jedna je závislá jen na r a druhá jen na ϑ . Jelikož v těchto součinech, jimiž jsou vyjádřeny v_r a v_ϑ , mají být funkce závislé na ϑ v „nekonečnu“ přímo úměrné $\cos \vartheta$, popř. $\sin \vartheta$, vede rychleji k cíli semiinverzní metoda, kterou jsme několikrát použili v elasticitě. U těchto dvou funkcí předpokládáme stejnou závislost na ϑ jak v „nekonečnu“, tak i v konečnu, tj. klademe

$$v_r = F(r) \cos \vartheta, \quad v_\vartheta = G(r) \sin \vartheta. \quad (18.8.7)$$

Z prvních dvou rovnic (18.8.4) je vidět, že funkci p je možné předpokládat ve tvaru

$$p = \mu H(r) \cos \vartheta. \quad (18.8.8)$$

Z podmínek (18.8.5) a (18.8.6) pro funkce F a G plyne

$$F(\infty) = U, \quad G(\infty) = -U, \quad F(a) = 0, \quad G(a) = 0. \quad (18.8.9)$$

Zavedením z rovnic (18.8.7) a (18.8.8) do rovnic (18.8.9) dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} H' &= F'' + \frac{2}{r} F' - \frac{4}{r^2} F - \frac{4}{r^2} G, & -\frac{1}{r} H &= G'' + \frac{2}{r} G' - \frac{2}{r^2} G - \frac{2}{r^2} F, \\ 0 &= F' + \frac{2}{r} F + \frac{2}{r} G, \end{aligned} \quad (18.8.10)$$

zde jsou čárkou naznačeny derivace podle r . Z poslední rovnice plyne

$$G = -\frac{r}{2} F' - F. \quad (18.8.11)$$

Pomocí této relace obdržíme z prostřední rovnice

$$H = \frac{r^2}{2} F''' + 3rF'' + 2F'. \quad (18.8.12)$$

Derivováním této rovnice podle r a srovnáním výsledků s první rovnicí (18.8.10) pak dostáváme

$$r^3 F^{(IV)} + 8r^2 F''' + 8rF'' - 8F' = 0. \quad (18.8.13)$$

To je obyčejná diferenciální rovnice Eulerova typu. Obvyklým předpokladem $F \sim r^n$ dostáváme pro n rovnici čtvrtého stupně a snadno se přesvědčíme, že ji můžeme psát ve tvaru

$$n(n+1)(n+3)(n-2) = 0.$$

Tím máme již určeny kořeny této algebraické rovnice, a tím vlastně i partikulární integrály, takže obecné řešení diferenciální rovnice (18.8.13) je

$$F = A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^3} + Dr^2. \quad (18.8.14)$$

Zavedením tohoto výsledku do rovnic (18.8.11) a (18.8.12) dostáváme G a H

$$\begin{aligned} G &= -A - \frac{B}{2r} + \frac{C}{2r^3} - 2Dr^2, \\ H &= \frac{B}{r^2} + 10Dr. \end{aligned} \quad (18.8.15)$$

Zbývá nám určit hodnotu konstant. Snadno se přesvědčíme, že pro ně plyne z okrajových podmínek (18.8.9) vyjádření

$$A = U, \quad B = -\frac{3}{2}aU, \quad C = \frac{1}{2}a^3U, \quad D = 0.$$

Tím máme funkce F , G , H zcela určeny. Uplatníme-li tento výsledek v (18.8.7) a (18.8.8), dospíváme ke konečnému tvaru hledaného řešení

$$\begin{aligned} v_r &= U \cos \vartheta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right), \\ v_\vartheta &= -U \sin \vartheta \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right), \\ p &= -\frac{3}{2} \frac{\mu a U}{r^2} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (18.8.16)$$

Těmito vzorci je dáno rozložení rychlostí a tlaku ve viskózní nestlačitelné tekutině, která obtéká nepohyblivou kouli.

Vypočítáme ještě výslednici sil, kterými působí tekutina na kouli. K tomu musíme znát složky tenzoru napětí. Normálou k libovolnému plošnému elementu povrchu koule je průvodič \mathbf{r} a proto stačí, budeme-li znát τ_{rr} a $\tau_{r\vartheta}$ (neboť $\tau_{r\varphi} = 0$). Z obecných vzorců

$$\tau_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \tau_{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right),$$

do nichž dosadíme z rovnic (18.8.16), dostaneme vyjádření

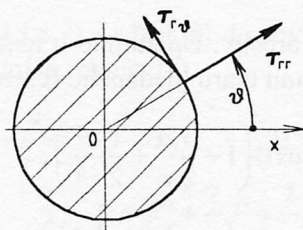
$$\tau_{rr} = \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \cos \vartheta, \quad \tau_{r\vartheta} = -\frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \sin \vartheta.$$

Z těchto složek tenzoru napětí určíme složky vektoru napětí. Vzhledem k osové symetrii stačí uvažovat jen jeho složku \vec{T}_x . Z obrázku 18.6 je vidět, že platí

$$\vec{T}_x = \tau_{rr} \cos \vartheta - \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta.$$

Vynásobením plošným elementem dS dostaneme elementární sílu a integraci přes celý povrch koule obdržíme výslednici W sil působících na povrch koule. Za dS můžeme zvolit pás šířky $a d\vartheta$, jehož plošný obsah je $dS = 2\pi a \sin \vartheta a d\vartheta$, takže máme

$$\begin{aligned} W &= \int_S \vec{T}_x dS = \int_0^\pi (\tau_{rr} \cos \vartheta - \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta) 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta = 6\pi \mu a U. \end{aligned} \quad (18.8.17)$$



Obr. 18.6

Tímto Stokesovým vzorcem

$$W = 6\pi \mu a U$$

je určena velikost síly, kterou působí proudící viskózní tekutina na kouli. Stejně veliký je odpor, který klade klidná tekutina rovnoměrnému přímočarému pohybu koule rychlostí U . K překonání této síly, tj. k udržení koule v rovnoměrném přímočarém pohybu, musíme vynaložit energii, která se disipuje v teplo.

Stokesův vzorec byl odvozen za předpokladu, že $R \ll 1$. V uvažovaném případě budou charakteristickými veličinami délky a rychlosti poloměr a koule a její rychlost U , takže bude $R = aU/\nu$. Reynoldsovo číslo nabývá malých hodnot, je-li buď velmi malý poloměr koule, nebo malá její rychlost, anebo jde-li o velmi viskózní tekutinu (tj. velké μ). Pak Stokesův zákon platí jak pro kapaliny, tak i pro plyny (pokud nejsou příliš zředěné, tj. pokud střední volná dráha molekul plynu není srovnatelná s poloměrem koule). Uvedme ještě, že když přehlédneme k proudovému zrychlení naznačeným způsobem, tj. v rovnicích nahradíme $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ výrazem $U_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, dostaneme pro odpor W vzorec

$$W = 6\pi\mu aU \left(1 + \frac{3}{8}R - \frac{19}{320}R^2 + \dots \right),$$

kde R je Reynoldsovo číslo. Je-li R relativně malé, lze druhý a další členy v závorce zanedbat vzhledem k 1 a dostaneme vzorec Stokesův.

Připomeňme závěrem, že Stokesův vzorec je velmi důležitý pro Einsteinovu teorii Brownova pohybu a pro Millikanova měření elementárního elektrického náboje.

18.9. Mezní vrstva

Při přibližném řešení Navierových–Stokesových rovnic v předešlém odstavci jsme předpokládali, že Reynoldsovo číslo je velmi malé. Tento předpoklad znamenal zanedbání členů příslušných síle setrvačnosti. Jestliže je naopak Reynoldsovo číslo veliké, takže síla vnitřního tření je relativně malá (tj. je malé ν) ve srovnání se silou setrvačnosti, zdálo by se logické zanedbat zase síly vnitřního tření. Tím by však Navierovy–Stokesovy rovnice přešly v Eulerovy rovnice pro dokonalou tekutinu. Uvedli jsme si však, že obecně nelze nalézt řešení Eulerových rovnic, které by splňovalo okrajové podmínky pro tekutinu viskózní. Experimentálně je totiž potvrzeno, že za normálních podmínek tekutina lne ke stěnám (tj. je vůči stěně v klidu), a proto musíme požadovat, aby okrajové podmínky pro viskózní tekutinu byly splněny, tj. aby na stěnách vymizela normálová i tečná složka rychlosti tekutiny.

Je však rovněž experimentálně potvrzeno, že při velkých Reynoldsových číslech se proudění skutečných tekutin v dostatečné (a to již poměrně malé) vzdálenosti od obtékaných těles (stěn) jen málo liší od proudění dokonalé tekutiny (tj. je téměř potenciální). Z výsledků experimentů tedy plyne, že proudící tekutina v sousedství těles splňuje podmínky předepsané pro viskózní tekutinu, avšak v dostatečné vzdálenosti od těchto těles se chová jako tekutina dokonalá. Při velkých Reynoldsových číslech můžeme tedy proudící viskózní tekutinu rozdělit na dvě oblasti, v jedné, která sousedí s obtékaným tělesem (stěnou), se plně uplatňují viskózní vlastnosti tekutiny, v druhé je proudění téměř potenciální (viskózní tekutiny). Oblast sousedící s obtékaným tělesem nazýváme *mezní vrstvou*. Ukážeme si, že tloušťka této vrstvy je velmi malá a její hranice neobsahuje žádnou proudnici.

Při obtékání nepohyblivé stěny dokonalou tekutinou musí na stěně vymizet normálová složka rychlosti tekutiny, kdežto tečná složka rychlosti je libovolná. Pro viskózní tekutiny okrajové podmínky vyžadují, aby vymizely obě složky rychlosti, jak normálová, tak i tečná. Z toho plyne, že tečná složka rychlosti (příslušná potenciálnímu proudění), která je na vnější hranici mezní vrstvy různá