Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	15	15	10	30	30	100
Získáno						

[15] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{(2z+1)^2}.$$

V bodě $z_0 = -\frac{1}{2}$:

1. najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$,
2. spočtěte reziduum,
3. určete typ singularity.

Řešení:

Nejprve spočteme Laurentovu řadu, rozvoj exponenciály v okolí požadovaného bodu je

$$e^z = e^{-\frac{1}{2}+\left(z+\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} e^{z+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^k}{k!},$$

jmenovatel $(2z+1)^2$ je již ve vhodném tvaru, celkem

$$\frac{e^z}{(2z+1)^2} = \frac{e^z}{4(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{k!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^k}{(k+2)!}.$$

Z Laurentovy řady v okolí bodu $z_0 = -\frac{1}{2}$ okamžitě vyčteme zbývající charakteristiky, reziduum v bodě $z_0 = -\frac{1}{2}$ je rovno koeficientu u mocniny $\left(z+\frac{1}{2}\right)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4},$$

singularita je zjevně pól násobnosti dva.

[15] 2. Nalezněte všechny singularity funkce

$$f(z) = \frac{1}{z(1+e^{az})},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Pro každou singularitu určete její typ a spočtěte reziduum.

Řešení:

Zjistíme, ve kterých bodech je jmenovatel roven nule, jeden takovýto bod je zřejmě

$$z = 0,$$

a tento bod je zjevně jednoduchým pólem zkoumané funkce. Dále je potřeba najít kořeny rovnice

$$1 + e^{az} = 0,$$

což je ale snadné (nesmíme zapomenout na mnohoznačnost používaných funkcí)

$$z_k = \frac{(2k-1)\pi}{a} i, \; k \in \mathbb{Z},$$

Nalezené kořeny rovnice $1 + e^{az}$ jsou jednonásobné – to lze například nahlédnout z Laurentovy řady funkce $1 + e^{az}$, skutečně

$$1+e^{az} = 1+e^{-az_k+a(z+z_k)} = 1-e^{a(z+z_k)} = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+z_k)^k}{k!} = (z+z_k)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(z+z_k)^{k-1}}{k!}.$$

Protože jsou kořeny rovnice $1+e^{az}$ jednonásobné, zkoumaná funkce bude v těchto bodech mít jednonásobné póly. Rezidua spočteme dle věty

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

v našem případě tedy

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z(1+e^{az})} = \left.\frac{1}{1+e^{az}}\right|_{z=0} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z(1+e^{az})} = \left.\frac{1}{aze^{az}}\right|_{z=z_k} = -\frac{1}{a\frac{(2k-1)\pi}{a}i} = \frac{i}{(2k-1)\pi}.$$

[10] 3. Najděte obraz množiny $M = \left\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Arg} z \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right\}$ při zobrazení $f(z) = iz^3$. Podrobně vysvětlete.

Řešení:

Všechny body v dané množině lze zřejmě popsat v polárních souřadnicích jako

$$z = te^{i\varphi},\ t \in [0, +\infty],\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$

dosadíme-li tento předpis do funcke iz^3, dostaneme

$$f(z) = it^3 e^{3i\varphi} = t^3 e^{i\left(3\varphi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

protože však bylo $t \in [0, +\infty)$ je také $a = t^3 \in [0, +\infty)$, úhel $\alpha = 3\varphi + \frac{\pi}{2}$ se pak pohybuje v intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Popis nových bodů v polárních souřadnicích je tedy

$$z = ae^{i\alpha},\ a \in [0, +\infty],\ \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right],$$

obrazem hledané množiny je tudíž poloprostor $f(M) = \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) \leq 0\}$.

[30] 4. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Použijeme standardní substituci,

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},$$
$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$
$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

odkud plyne $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}x$. Je-li $x \in (0, 2\pi)$, pak $|z| = 1$, a integrace tedy po substituci přejde na integraci přes jednotkovou kružnici. Označme si

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{iz} \frac{\frac{1}{4}(z + z^{-1})^2}{5 + \frac{2}{i}(z - z^{-1})}$$

Po provedení substituce dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Stačí tedy spočíst residua $f(z)$ v singularitách, které jsou uvnitř jednotkové kružnice, viz Obrázek 2. Funkci $f(z)$ upravíme tak, abychom snadno identifikovali její singularity,

$$\frac{1}{iz} \frac{\frac{1}{4}(z + z^{-1})^2}{5 + \frac{2}{i}(z - z^{-1})} = \frac{1}{4z^2} \frac{(z^2 + 1)^2}{5iz + 2z^2 - 2} = \frac{1}{4z^2} \frac{(z^2 + 1)^2}{(z + 2i)(2z + i)}$$

z čehož okamžite vidíme, že stačí spočíst rezidua v bodech 0 a $-\frac{i}{2}$, přičemž v bodě 0 má funkce pól násobnosti dva, a v bodě $-\frac{i}{2}$ má funkce pól násobnosti jedna. (Singularita $z_0 = -2\mathrm{i}$ leží vně jednotkové kružnice.) Jest

$$\mathrm{Res}_{-\frac{i}{2}} f(z) = \frac{1}{4z^2} \frac{(z^2 + 1)^2}{2(z + 2i)}\bigg|_{z=-\frac{i}{2}} = \frac{3}{16} i$$
$$\mathrm{Res}_0 f(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{1}{4} \frac{(z^2 + 1)^2}{(z + 2i)(2z + i)} \right)\bigg|_{z=0} = -\frac{5}{16} i,$$

kde jsme využili pomocné věty pro výpočt residua, které zní

Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak

$$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{g'(z)}\bigg|_{z=z_0}.$$

a

Buď $f(z)$ komplexní funkce, která má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše n, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right) \right).$$

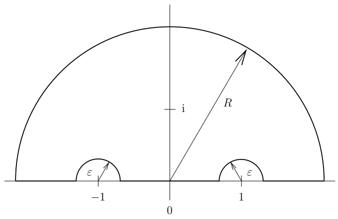
Dle reziduové věty je tedy

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x} \, \mathrm{d}x = \int_{|z|=1} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-\frac{i}{2}} f(z) + \operatorname{Res}_0 f(z) \right)$$
$$= 2\pi i \left(\frac{3}{16} i - \frac{5}{16} i \right) = \frac{\pi}{4}.$$

[30] 5. Spočtěte integrál (ve smyslu hlavní hodnoty)

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4 - 1}\, \mathrm{d}x.$$

K výpočtu integrálu můžete použít křivku načrtnutou na Obrázku 1.



Obrázek 1: Integrační křivka pro výpočet integrálu $\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4-1}\, \mathrm{d}x$.

Řešení:

Protože se jedná o funkci sudou lze snadno nahlédnout, že

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4 - 1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Im \left(\int_{-\infty}^\infty f(z)\, \mathrm{d}z \right),$$

kde $f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4-1}$. Povšimneme si, že

$$f(z) = \frac{z^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^4 - 1} = \frac{z^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2-1)(z^2+1)}.$$

Funkce f má tedy singularity (póly násobnosti jedna) v bodech ± 1 a $\pm \mathrm{i}$. Protože funkce f má póly i na reálné ose musíme se jim při integraci vyhnout. Volíme tedy křivku $\varphi_{\varepsilon,R}$, viz Obrázek 1, kde $\varphi_{\varepsilon,R} =_{\mathrm{def}} \varphi^1_{\varepsilon,R} + \varphi^2_{\varepsilon,R} + \varphi^3_{\varepsilon,R} + \varphi^4_{\varepsilon,R}$ a

$$\begin{aligned}
\varphi^1_{\varepsilon,R}: &\quad z = t, &\quad t \in (-R, -1-\varepsilon) \cup (-1+\varepsilon, 1-\varepsilon) \cup (1+\varepsilon, R),\\
-\varphi^2_{\varepsilon,R}: &\quad z = \varepsilon e^{it} - 1, &\quad t \in (0, \pi),\\
-\varphi^3_{\varepsilon,R}: &\quad z = \varepsilon e^{it} + 1, &\quad t \in (0, \pi),\\
\varphi^4_{\varepsilon,R}: &\quad z = Re^{it}, &\quad t \in (0, \pi).
\end{aligned}$$

Spočtěme rezidua funkce f v bodech ± 1, i.

$$\operatorname{Res}_{\pm 1} f(z) = \left. \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)(z \pm 1)} \right|_{z=\pm 1} = \frac{1}{4} e^{\pm i}$$

$$\operatorname{Res}_{i} f(z) = \left. \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2-1)(z+i)} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{4}.$$

Při výpočtu residuí jsme použili lemma, které říká:

Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

Použitím reziduové věty tedy dostaneme

$$\int_{\varphi_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_i f(z) = \frac{\pi i}{2e}$$

Celkem dostáváme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i e^{-1} - \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0+}} \left(\int_{\varphi^2_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi^3_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi^4_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \right)$$

Zbývá odhadnout poslední tři integrály. Na poslední použijeme Jordanovo lemma, to jest ukážeme, že

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi^4_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz} z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Jordanovo lemma zní takto:

> Buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ a uvažujme funkci f spojitou na množině $A = \left\{ z \in \mathbb{C} |\, z = R\mathrm{e}^{is}, R > \rho,\, s \in [\alpha,\beta] \right\}$, kde $\rho \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Označme
>
> $$M_R =_{\mathrm{def}} \max_{z\in\boldsymbol{\gamma}_R} f(z),$$
>
> kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_R$ je kruhový oblouk o poloměru R vymezený úhly α a β, aneb
>
> $$\boldsymbol{\gamma}_R = \left\{ z \in \mathbb{C} |\, z = R\mathrm{e}^{is},\ s \in [\alpha,\beta] \right\}.$$
>
> Pak platí:
>
> 1. Je-li $\lim_{R\to+\infty} R M_R = 0$, pak $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
> 2. Je-li $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ a je-li $[\alpha,\beta] \subset [0,\pi]$, pak $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\boldsymbol{\gamma}_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, kde $\delta > 0$ je libovolné kladné reálné číslo.

Potřebujeme tedy ukázat, že

$$M_R = \max_{z\in\mathbb{C};|z|=R,\Im(z)\geq 0} \left| \frac{z^3}{z^4-1} \right| \to 0,$$

pro $R \to +\infty$. Ale toto je zřejmě splněno, stačí si kupříkladu uvědomit, že

$$\begin{aligned}\left|z^4-1\right| &= \left|R^4\cos s + \mathrm{i}R^4 \sin s - 1\right| = \sqrt{\left(R^4\cos s - 1\right)^2 + \left(R^4\right)^2 \sin^2 s} \\ &= \sqrt{\left(R^4\right)^2 - 2R^4\cos s + 1} \geq \sqrt{\left(R^4\right)^2 - 2R^4 + 1} = \sqrt{\left(R^4-1\right)^2} = \left|R^4-1\right|,\end{aligned}$$

odkud pro všechna $R > 1$ plyne, že

$$\left|\frac{z^3}{z^4-1}\right| \leq \frac{R^3}{R^4-1}.$$

Na zbývající integrály použijeme lemma o obcházení jednonásobného pólu, které můžeme použít, díky tomu, že funkce f má v bodech ± 1 jednoduché póly a na okolí těchto bodů je holomorfní.

Lemma o obcházení jednonásobného pólu říká:

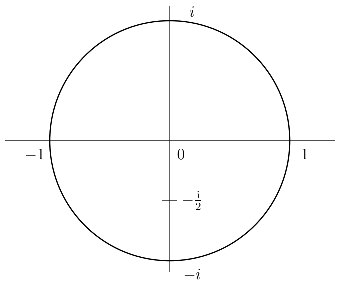
> Buď funkce f meromorfní funkce v okolí bodu z_0 a buď tento bod jejím pólem násobnosti jedna. Uvažujme kladně orientovanou křivku $\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon$, která je kruhovým obloukem o poloměru r vymezeným úhly $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, aneb
>
> $$\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} | \, z = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}, \, s \in [\alpha, \beta] \right\}.$$
>
> Pak platí
>
> $$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\boldsymbol{\gamma}_\varepsilon} f(z) \, \mathrm{d}z = \mathrm{i} \, (\beta - \alpha) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

S použitím lemmatu tedy dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varphi^2_{\varepsilon, R}} f(z) \, \mathrm{d}z = -\pi i \operatorname{Res}_{-1} f(z) = -\pi i \frac{e^{-i}}{4},$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varphi^3_{\varepsilon, R}} f(z) \, \mathrm{d}z = -\pi i \operatorname{Res}_{1} f(z) = -\pi i \frac{e^{i}}{4}.$$

(Residua jsme spočetli výše.) Celkem

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4 - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Im \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \, \mathrm{d}z \right)$$
$$= \frac{1}{2} \Im \left(\pi i \left(\frac{1}{2e} + \left(\frac{e^{-i}}{4} + \frac{e^{i}}{4} \right) \right) \right) = \frac{1}{2} \Im \left(i \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{e} + \cos 1 \right) \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{e} + \cos 1 \right).$$



Obrázek 2: Integrační křivka pro výpočet integrálu $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}x$.