Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Skupina: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	40	10	10	20	20	100
Získáno						

[40] 1. Ukažte, že integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

existuje jako Lebesgueův integrál (a je konečný). Vhodným zavedním parametru spočtěte hodnotu tohoto integrálu pomocí věty o záměně derivace a integrálu. (Případně jinak.)

Může se vám hodit:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C,$$

$$\int \ln(b^2 + x^2) \, \mathrm{d}x = x \ln(b^2 + x^2) - 2x + 2b \arctan\left(\frac{x}{b}\right) + C,$$

$$\int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C,$$

$$\int (\sin^n x) \, \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int \left(\sin^{n-2} x\right) \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int (\cos^n x) \, \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int \left(\cos^{n-2} x\right) \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x,$$

$$\frac{24}{a(a^2 + 16)(a^2 + 4)} = \frac{3}{8a} - \frac{4}{8} \frac{a}{a^2 + 4} + \frac{1}{8} \frac{a}{a^2 + 16}.$$

Řešení:

Integrál zjevně existuje jako Lebesgueův integrál. Platí totiž

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin^4 x}{x^2} = 0$$

a dále (pro $x > 1$)

$$\left| \frac{\sin^4 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Prvně jmenovanou rovnost využijeme při analýze chování integrálu v blízkosti nuly, druhou rovnost využijeme při zkoumání chování v nekonečnu. (Pamatujeme si, že $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$ existuje jako Lebesgueův integrál.)

Pokusíme se integrál spočíst zavedením vhodného parametru. Cílem je zbavit se funkce x^2 ve jmenovateli zlomku. První nápad může být zkoumat integrál

$$I(b) =_{\mathrm{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{e}^{-bx^2} \, \mathrm{d}x.$$

Derivací podle parametru b bychom ovšem získali

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = -\int_0^{+\infty} \left(\sin^4 x\right) \mathrm{e}^{-bx^2} \, \mathrm{d}x,$$

což bohužel vede na integrál, který neumíme jednoduše vyčíslit. Zkusme proto jiný postup, motivovaný kupříkladu čtvrtou nápovědou. Definujme

$$I(a) =_{\mathrm{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x.$$

Pak je

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x,$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}a^2} = \int_0^{+\infty} \left(\sin^4 x\right) \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

Vše bude pravděpodobně dobře fungovat pokud $a > 0$ a lze doufat, že je možné provést limitní přechod $a \to 0+$. Posledně jmenovaný integrál lze spočíst podle nápovědy. Jest

$$\int_0^{+\infty} \left(\sin^4 x\right) \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{24}{a(a^2+16)(a^2+4)}.$$

Abychom získali explicitní vzorec pro funkci $I(a)$, musíme tedy vyřešit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}a^2} = \frac{24}{a(a^2+16)(a^2+4)}.$$

Rozkladem v parciální zlomky (použijeme nápovědu) získáme

$$\int \frac{24}{a(a^2+16)(a^2+4)}\,\mathrm{d}a = \int \left(\frac{3}{8a} - \frac{4}{8}\frac{a}{a^2+4} + \frac{1}{8}\frac{a}{a^2+16}\right)\mathrm{d}a = \frac{3}{8}\ln a - \frac{1}{4}\ln(a^2+4) + \frac{1}{16}\ln(a^2+16) + C.$$

Jest tedy

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \frac{3}{8}\ln a - \frac{1}{4}\ln(a^2+4) + \frac{1}{16}\ln(a^2+16) + C,$$

a další integrace (s použitím nápovědy) okamžite vede na

$$I(a) = \frac{3}{8}a\ln a + \frac{1}{16}a\ln(a^2+16) - \frac{1}{4}a\ln(a^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{4} - \arctan\frac{a}{2} + Ca + D,$$

kde C a D jsou integrační konstanty.

Ověřme nyní platnost provedených operací. Chceme použít větu o záměně derivace a intergrálu, která říká:

> Buď $f(x,b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí
>
> - Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
> - Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
> - Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)\right| \leq g(x)$.
> - Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.
>
> Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x,b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce
>
> $$F(b) = \int_I f(x,b)\mathrm{d}x$$
>
> je diferencovatelná na I a platí
>
> $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)\mathrm{d}x.$$

Připomeňme si, že se zajímáme o integrál

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $f(x,a) =_{\mathrm{def}} \frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{e}^{-ax}$ je pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné ale pevné kladné reálné číslo, nepochybně diferecovatelná funkce vzhledem k proměnné a a pro jakoukoliv hodnotu parametru a je to spojitá a tudíž měřitelná funkce proměnné x na intervalu $(0, +\infty)$. V okolí nekonečna platí odhad

$$\left|\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{e}^{-ax}\right| \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon x},$$

a $I(a)$ tudíž existuje dokonce pro všechny hodnoty parametru $a \in (\varepsilon, +\infty)$. (Okolí nuly nepředstavuje pro existenci integrálu problém, integrand lze spojitě dodefinovat na intervalu $[0, +\infty)$, viz výše.)

Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}$, což je ovšem snadné

$$\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}\right| = \left|\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\left(\sin^3 x\right)\mathrm{e}^{-ax}\right| \leq \mathrm{e}^{-ax} \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon x}.$$

Lze tudíž provést první záměnu derivace a integrálu, pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$ tudíž skutečně platí

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

V předchozím rutinním výpočtu jsme však potřebovali spočíst druhou derivaci $\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}a^2}$, přičemž výpočet byl opět založen na záměně derivace a integrálu. Musíme proto znovu ověřit podmínky věty o záměně derivace a integrálu, tentokrát pro integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$. Integrovatelnou majorantu pro derivaci najdeme kupříkladu takto

$$\left|\left(\sin^4 x\right)\mathrm{e}^{-ax}\right| \leq \mathrm{e}^{-ax} \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon x}.$$

Ostatní podmínky věty o záměně derivace a integrálu jsou zjevně splněny, což lze nahlédnout drobnou úpravou argumentace z předchozího použití téže věty. Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}a^2} = \frac{24}{a(a^2+16)(a^2+4)}$$

a následně tedy

$$I(a) = \frac{3}{8}a\ln a + \frac{1}{16}a\ln(a^2+16) - \frac{1}{4}a\ln(a^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{4} - \arctan\frac{a}{2} + Ca + D.$$

Zbývá určit integrační konstanty C a D. To provedeme pomocí limitního přechodu. Platí

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{3}{8}\ln a - \frac{1}{4}\ln(a^2+4) + \frac{1}{16}\ln(a^2+16) + C\right] = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{(a^2+16)^{\frac{1}{16}}}{(a^2+4)^{\frac{1}{4}}}a^{\frac{3}{8}}\right) + C\right] = C,$$

na druhou stranu ovšem platí (pokud lze zaměnit limitu a integrál, což se nám snad podaří ověřit později)

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = -\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\lim_{a\to+\infty}\frac{\sin^4 x}{x}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Zjevně tedy musí být $C = 0$.

Dále platí

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+\infty} I &= \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{3}{8}a\ln a - \frac{1}{4}a\ln(a^2+4) + \frac{1}{16}a\ln(a^2+16) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{4} - \arctan\frac{a}{2} + D\right]\\ &= \lim_{a\to+\infty}\left[a\ln\left(\frac{(a^2+16)^{\frac{1}{16}}}{(a^2+4)^{\frac{1}{4}}}a^{\frac{3}{8}}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + D\right]\\ &= \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left\{\frac{(1+\frac{16}{a^2})^{\frac{a^2}{16}\frac{1}{a}}}{(1+\frac{4}{a^2})^{\frac{a^2}{4}\frac{1}{a}}}\right\} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + D\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + D,\end{aligned}$$

na druhou stranu ovšem platí (pokud lze zaměnit limitu a integrál, což se nám snad podaří ověřit později)

$$\lim_{a\to+\infty} I = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{a\to+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = 0,$$

a je tedy nutné, aby $D = \frac{\pi}{4}$. Celkem tedy

$$I(a) = \frac{3}{8}a\ln a + \frac{1}{16}a\ln(a^2+16) - \frac{1}{4}a\ln(a^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{4} - \arctan\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Zbývá odůvodnit platnost záměny limity a integrálu. To provedeme kupříkladu pomocí Leviho věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině M.

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ zdola k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro skoro všechna $x \in M$ platí $g \leq f_1$ a $\int_M g \,\mathrm{d}x > -\infty$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_M f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_M f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: Obdobně lze zformulovat větu pro posloupnost, která konverguje shora. Lebesgueovskou integrovatelností funkce h se v tomto případě rozumí, že je konečný alespoň jeden z Lebesgueových integrálů z h^+ a h^-. Aneb jako lebesgueovsky integrovatelné funkce zde chápeme i funkce, které mají *nekonečný* Lebesgueův integrál.

Zjevně platí, že pro $a \to +\infty$ máme

$$\frac{\sin^4 x}{x} \mathrm{e}^{-ax} \searrow 0,$$
$$\frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{e}^{-ax} \searrow 0,$$

a ověření ostatní podmínek Leviho věty je snadné. (Použili jsme Leviho větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.) Kromě Leviho věty by nám samozřejmě stejně dobře posloužila, pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$, i Lebesgueova věta.

Nyní je na čase učinit poslední krok a sice použít rovnost

$$I(a) = \frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4},$$

která platí pro každé $a > 0$, k výpočtu hodnoty integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$

To provedeme záměnou limity a integrálu, jest

$$\lim_{a\to0+} I = \lim_{a\to0+} \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{a\to0+} \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \,\mathrm{d}x,$$

přičemž z explicitního vzorce pro I plyne, že

$$\lim_{a\to0+} I = \lim_{a\to0+} \left[\frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

Je tudíž

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Záměnu limity a integrálu odůvodníme například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.

- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Integrovatelnou majorantou je kupříkladu funkce $\frac{\sin^4 x}{x^2}$, neboť pro $a \in (0,+\infty)$ a $x \in (0,+\infty)$ platí

$$\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{e}^{-ax} \leq \frac{\sin^4 x}{x^2}.$$

(Použili jsme Lebesgueovu větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.)

[10] 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijete-li při výpočtu nějakou větu, pečlivě odůvodněte, že jsou splněny patřičné předpoklady.

Řešení:

Povšimneme si, že integrál je dobře definován (existuje a je konečný) pro libovolné n. Chování v nekonečnu je jasné, v okolí nuly využijeme znalosti limity

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+nx)}{nx} = 1.$$

Zjevně platí, že

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\mathrm{e}^{-x^2} = 0.$$

Pokud tedy ukážeme, že je možné zaměnit limitu a integrál, můžeme snadno spočíst původní limitu,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\mathrm{e}^{-x^2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Záměnu limity a integrálu lze odůvodnit například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Posloupnost f_n je v našem případě tvořena funkcemi

$$f_n(x) =_{\mathrm{def}} \frac{\ln(1+nx)}{nx}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Tyto funkce jsou na intervalu $M = (0,+\infty)$ spojité a tudíž měřitelné. První předpoklad Lebesgueovy věty je tedy splněn.

Druhý předpoklad je rovněž splněn, limitu jsme spočetli pro libovolné $x \in M$.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu. (Třetí předpoklad Lebesgueovy věty.) Pro libovolné n platí

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx} \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x^2},$$

kde funkce e^{-x^2} je lebesgueovsky integrovatelná na M. (Pro $x > 1$ je $\mathrm{e}^{-x^2} < \mathrm{e}^{-x}$ a funkce e^{-x} je lebesgueovsky integrovatelná.) Nerovnost $\frac{\ln(1+y)}{y} \leq 1$ odůvodníme například z konkávnosti funkce $\ln(1+y)$. V Lebesgueově větě stačí tedy volit

$$g(x) =_{\text{def}} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Všechny předpoklady Lebesgueovy věty jsou splněny a lze proto provést záměnu limity a integrálu.

[10] 3. Spočtěte objem tělesa M v $\mathbb{R}^3$ vymezeného plochami

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ x &= a, \\ y &= 0, \\ y &= b, \\ z &= 0, \\ z &= \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \end{aligned}$$

kde $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry.

Řešení:

Těleso, jehož objem zkoumáme je zjevně "kvádr" jehož dolní podstava je tvořena obdélníkem $[0, a] \times [0, b]$ v rovině $z = 0$ a horní "křivá podstava" je popsána rovnicí $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$. Přímočaré použití Fubiniho věty dává

$$\begin{aligned} \int_M \mathrm{d}\lambda &= \int_{x=0}^{a} \left[\int_{y=0}^{b} \left(\int_{z=0}^{\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{a} \left[\int_{y=0}^{b} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{a} \left[\left[\frac{x^2 y}{2p} + \frac{y^3}{6q} \right]_{y=0}^{b} \right] \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{a} \left[\frac{x^2 b}{2p} + \frac{b^3}{6q} \right] \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3 b}{6p} + \frac{x b^3}{6q} \right]_{x=0}^{a} = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{a b^3}{6q} = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right). \end{aligned}$$

[20] 4. Spočtěte integrál

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} \,\mathrm{d}\lambda,$$

kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina definovaná vztahem

$$M =_{\text{def}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^2 \leq x^2 y \right\}.$$

(Zápis $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}} \,\mathrm{d}\lambda$ je jen jiné značení pro $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.)

Řešení:

Implicitně zadaná křivka

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^2 = x^2 y,$$

která tvoří hranici množiny M zjevně leží v horní polorovině ($y \geq 0$) a prochází bodem $\mathbf{x} = [0, 0]$. Tato křivka je dále symetrická vůči svislé ose $x = 0$, aneb leží-li bod $[x, y]$ na křivce, pak na křivce leží i bod $[-x, y]$. Křivka protíná osu $x = 0$ pouze v bodě $\mathbf{x} = [0, 0]$. Zavedeme-li "polární" souřadnice vztahem

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi, \\ y &= r\sqrt{3}\sin\varphi, \end{aligned}$$

vidíme, že implicitní rovnice pro křivku přejde na rovnici

$$r^4 = r^3\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Pro daný úhel φ má tato rovnice jedinné řešení, a sice

$$r = \sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Z dosud provedených úvah je zřejmé, že křivka musí kvalitativně odpovídat křivce načrtnuté na Obrázku 1. Použijeme-li "polární" souřadnice navržené výše, je jasné, že determinant Jacobiho matice je

$$\det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sqrt{3}\sin\varphi & r\sqrt{3}\cos\varphi \end{bmatrix} = r\sqrt{3}.$$

Vzhledem k symetrii množiny M a integrandu $\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}}$ můžeme výpočet provést pouze v prvním kvadrantu a výsledek pak vynásobit dvěma. Celkem

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{3}}}\,\mathrm{d}\lambda = 2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{r=0}^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi}\frac{1}{r}r\sqrt{3}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = 6\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -6\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

[20] 5. Spočtěte plošný obsah množiny M v $\mathbb{R}^2$ vymezené křivkami

$$\begin{aligned} x^2 &= py, \\ x^2 &= qy, \\ y &= ax, \\ y &= bx, \end{aligned}$$

kde $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry takové, že $a > b$, $p > q$.

Řešení:

Povšimneme si, že výraz $\frac{x^2}{y}$ je pro všechna $[x, y] \in M$ v rozmezí $[q, p]$, zatímco výraz $\frac{y}{x}$ je pro všechna $[x, y] \in M$ v rozmezí $[b, a]$. To poskytuje návod pro nalezení transformace, která množinu M převede na "obdélník", viz Obrázek 2. Volme tedy

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2}{y}, \\ v &= \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

kde $u \in (q, p)$, $v \in (b, a)$. Obrácená transformace je

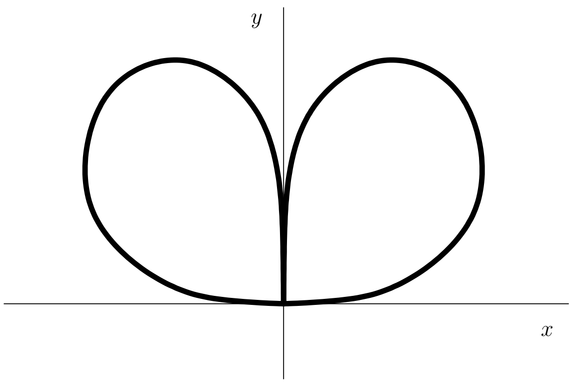
$$\begin{aligned} x &= uv, \\ y &= uv^2. \end{aligned}$$

Volíme-li $[u, v] \in (q, p) \times (b, a)$, pak tato transformace skutečně převádí obdélník $(q, p) \times (b, a) \subset \mathbb{R}^2$ na množinu M. K výpočtu plošného obsahu množiny M proto využijeme větu o substituci a Fubiniho větu. Determinant Jacobiho matice je

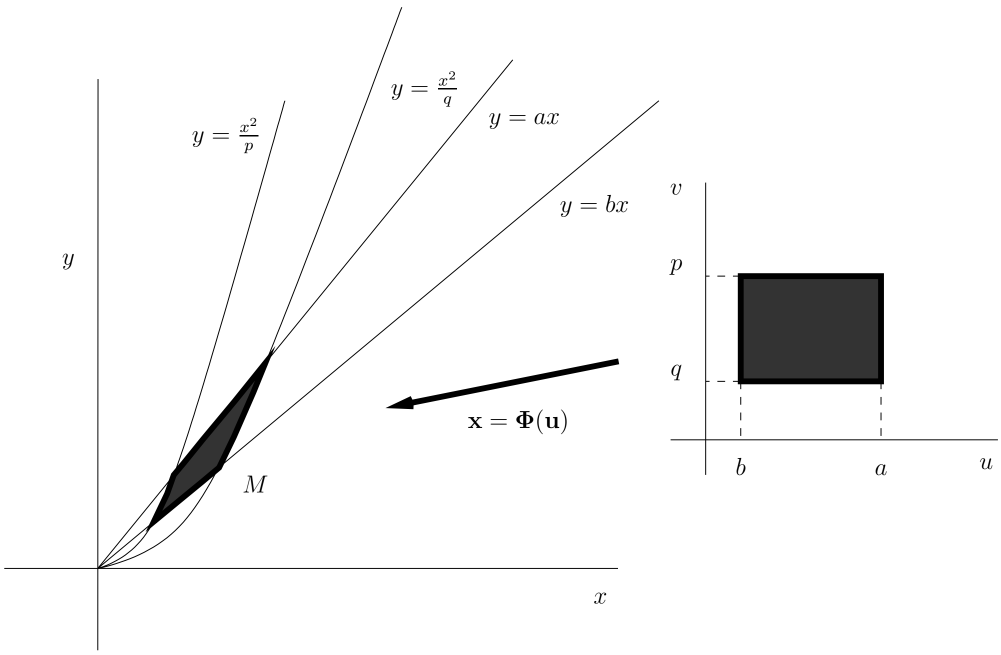
$$\det\begin{bmatrix} v & u \\ v^2 & 2uv \end{bmatrix} = uv^2.$$

Platí tedy

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \int_{u=q}^{p}\left(\int_{v=b}^{a} uv^2\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_{u=q}^{p} u\frac{a^3-b^3}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\left(p^2-q^2\right)\left(a^3-b^3\right).$$



Obrázek 1: Kvalitativní náčrtek křivky zadané implicitní rovnicí $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2 y$.



Obrázek 2: Množina M a její transformace na obdélník.