Uvažujte takzvanou Gamma funkci danou pro $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 1$ předpisem

$$\Gamma(s) =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}x.$$

1. Ukažte, že pro kladná přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$ je hodnota Gamma funkce totožná s hodnotou faktoriálu $(n-1)!$, aneb ukažte, že platí

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

2. S použitím funkce Gamma odvoďte Stirlingův vzorec pro aproximaci fraktoriálu velkých čísel

$$n! \approx n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

aneb

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Můžete postupovat například takto. Nejprve přepište $n!$ s použitím funkce Gamma a proveďte vhodnou substituci,

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = n\xi \\ \mathrm{d}x = n\mathrm{d}\xi \end{vmatrix} = n^{n+1} \int_{\xi=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\xi} \mathrm{e}^{n \ln \xi} \,\mathrm{d}\xi.$$

Poslední integrál pak aproximujte technikou probíranou na cvičení.