Termín pro odevzdání: pondělí 16. března 2020

1. [Nepovinné] Najděte explicitní vztah pro následující derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{s=b(x)}^{a(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $a(x)$, $b(x)$ a $f(x,s)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Pokuste se vzorec odvodit sami, usoudíte-li, že potřebujete malou nápovědu, zkuste zadat do vašeho oblíbeného vyhledávače klíčové slovo *Leibniz integral rule.*

2. [Nepovinné] Pohyb matematického kyvadla o délce $l$ v gravitačním poli s gravitačním zrychlením $g$ je popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0, \tag{1}$$

kde $\theta$ je úhel mezi svislicí a ramenem kyvadla. (Souřadný systém je zaveden tak, jak jste zvyklí.) Ukažte, že perioda $T$ kmitu kyvadla, které je vypuštěno s nulovou rychlostí z počáteční výchylky $\theta_0$ je dána vztahem

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+a\theta_0^2+b\theta_0^4+\cdots\right), \tag{2}$$

kde $a$, $b\in R$ jsou reálné konstanty. Najděte hodnotu konstanty $a$.

Návod je následující. Rozmyslete si, že vynásobením obou stran rovnice (1) výrazem $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{g}{l}\cos\theta\right)=0,$$

odkud plyne, že

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{2g}{l}\cos\theta+C,$$

kde $C$ je konstanta. Hodnotu konstanty určíme tak, že v horní úvrati (maximální výchylka $\theta_0$) má kyvadlo nulovou úhlovou rychlost, aneb $\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta_0}=0$. Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}.$$

(Kam se poděla absolutní hodnota? Vysvětlete!) Nyní použijeme větu o derivaci inverzní funkce a zjistíme, že platí

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}},$$

aneb

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

Pokud poslední rovnici zintegrujeme od $\theta=0$ do $\theta=\theta_0$, tak na levé straně dostaneme čtvrtinu periody, neboť kyvadlu trvá čtvrtinu periody než přejde z nejnižšího bodu do horní úvrati. Je tedy

$$\frac{T}{4}=\int_{\theta=0}^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

Integrál na pravé straně je těžké přesně spočíst, ale na to se nás nikdo neptal. Potřebujeme pouze jeho aproximaci pro malé $\theta_0$. Integrál převedeme rafinovanou substitucí do tvaru

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

kde $k=\sin\frac{\theta_0}{2}$. (Substituce je rafinovaná, zkuste zadat do vašeho oblíbeného vyhledávače klíčová slova *pendulum* a *elliptic integral* a jistě najdete vhodnou nápovědu.) Poslední integrál spočteme tak, že spočteme integrál Taylorova rozvoje integrandu pro malé $\theta_0$, čímž zjistíme koeficient v rozvoji (2).

Termín pro odevzdání: pondělí 9. března 2020

1. V předchozím domácím úkolu jste ukázali, že pro $x \to 0$ platí

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

Použijte výše uvedenou rovnost a najděte Taylorův rozvoj funkce $\arctan(\sin x)$ v bodě $x_0 = 0$ do pátého řádu. Měli byste se dopracovat k výsledku

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^5 + o\left(x^5\right).$$

2. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^5}.$$

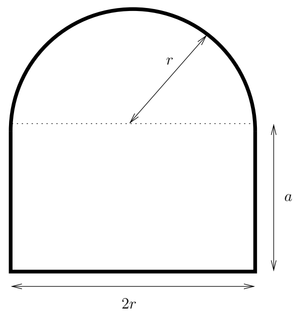
(Při výpočtu by se vám mohl hodit výsledek z pedchozího příkladu.)

3. Přímým derivováním spočtěte Taylorův rozvoj funkce $\sin x$ v bodě $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ do pátého řádu. Měli byste se dopracovat k výsledku

$$\sin x = -1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^2 - \frac{1}{24}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^4 + o\left(x^5\right).$$

4. Uvažujte chodbu o průřezu naznačeném na Obrázku 1. (Průřez chodby je složen z polokruhové výseče o poloměru $r$ a přiléhajícího obdélníku, jehož svislá strana má délku $a$.) Určete, jaký poloměr $r$ musí mít polokruh, aby byl obvod chodby *minimální* při zachování požadovaného plošného obsahu $A$.

Ukažte, že vámi nalezená hodnota $r$ skutečně odpovídá *minimálnímu* obvodu.




Obrázek 1: Chodba.

Termín pro odevzdání: pondělí 2. března 2020

1. Přímým derivováním spočtěte Taylorův rozvoj funkce $\arctan x$ v bodě $x_0 = 0$ do pátého řádu.

2. [Nepovinné] Navštivte počítačovou laboratoř, spusťte si software pro symbolické výpočty `Wolfram Mathematica`, a přesvědčte se, že vaše řešení předchozího příkladu je správné. Příkaz, který hledáte je:

```
Series[ArcTan[x], {x, 0, 5}]
```

Připomínám, že software `Wolfram Mathematica` si můžete nainstalovat i na vlastní počítač, MFF UK má pro studenty zakoupenou neomezenou licenci, pokyny k instalaci najdete na internetových stránkách Matematického ústavu. Pokud jsou mezi vámi příznivci mikropočítačů Raspberry Pi, pak vězte, že `Wolfram Mathematica` je k dispozici zdarma na všech těchto počítačích, podrobnosti najdete zde.

3. S použitím Taylorova rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(1-x) - \arctan\left(1 - e^{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x} - x\right)^2}.$$

4. [Nepovinné] Výsledek předchozího příkladu si ověřte v `Wolfram Mathematica`. Příkaz, který hledáte, je

```
Limit[(ArcTan[Exp[x - 1] - 1] - ArcTan[x - 1])/((Sqrt[x] - x)^2), x -> 1]
```

Termín pro odevzdání: pondělí 24. února 2020

1. S použitím vzorců odvozených na cvičení spočtěte objem koule o poloměru $R$. (Nepoužívejte sférické souřadnice ani jiné pokročilé techniky. Zatím dokážeme integrovat pouze vzhledem k jedné proměnné.)

2. Na cvičení jsme pomocí úvahy o rozvinutí pláště kuželu do roviny ukázali, že plošný obsah $S_K$ pláště rotačního kuželu o výšce $H$ a poloměru podstavy $R$ je dán vzorcem

$$S_K = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}. \tag{3}$$

Zároveň jsme ukázali, že plošný obsah pláště rotačního tělesa vytvořeného rotací grafu funkce $f(x)$ podél osy $x$ je dán vzorcem

$$S = \int_{x=a}^{b} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left( \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \right)^2} \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Najděte vhodný předpis pro funkci $f$, která po rotaci kolem osy $x$ vytvoří rotační kužel o výšce $H$ a o poloměru podstavy $R$, a přímým výpočtem za použití vzorce (4) ukažte, že plošný obsah pláště tohoto kuželu je skutečně dán vzorcem (3).