Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	10	20	20	20	10	20	100
Získáno							

[10] 1. Spočtěte

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Integrál spočteme metodou *per partes*, platí

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = x^2 & u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}^+$, primitivní funkci jsme našli na celém definičním oboru.

[20] 2. Spočtěte

$$\int \ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Integrál spočteme metodou *per partes*, platí

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln\left(1+x^2\right) & v' = \frac{2x}{1+x^2} \end{vmatrix} = x\ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + C,\end{aligned}$$

kde C je integrační konstanta. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}$, primitivní funkci jsme našli na celém definičním oboru.

[20] 3. Spočtěte

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Připomínám, že $\sin^2 x =_{\mathrm{def}} (\sin x)^2$.

Řešení:

Nejprve využijeme trigonometrickou identitu $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, a poté provedeme výpočet pomocí metody *per partes*,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^{-x} & u = -\mathrm{e}^{-x} \\ v = \cos 2x & v' = -2\sin 2x \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x - 2\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + \int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Zbývá spočíst integrál $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$, což provedeme metodou *per partes*, platí

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^{-x} & u = -\mathrm{e}^{-x} \\ v = \sin 2x & v' = 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + 2\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^{-x} & u = -\mathrm{e}^{-x} \\ v = \cos 2x & v' = -2\sin 2x \end{vmatrix} \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + 2\left(-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x - 2\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Označíme-li tedy $I =_{\text{def}} \int \mathrm{e}^{-x} \sin 2x \,\mathrm{d}x$, vidíme, že předchozí výpočet vede k rovnici

$$I = -\mathrm{e}^{-x} \sin 2x - 2\mathrm{e}^{-x} \cos 2x - 4I,$$

odkud plyne, že

$$I = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x} \sin 2x - \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x} \cos 2x.$$

(Integrační konstantu můžeme v tuto chvíli ignorovat, doplníme ji až u konečného výsledku.) Dosadíme-li předchozí identitu do vzorce získaného v prvním kroku, dostaneme

$$\int \mathrm{e}^{-x} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x} \sin 2x + C,$$

kde C je integrační konstanta. Definiční obor integrandu je $\mathbb{R}$, primitivní funkci jsme našli na celém definičním oboru.

[20] 4. Spočtěte

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Integrand je definován pro $x > -1$, na tomto intervalu také budeme hledat primitivní funkci. Provedeme jednoduchou substituci

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{1+x} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \text{ neboli } \mathrm{d}u = \frac{1}{2u}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{2u}{1+u} \,\mathrm{d}u = \int 2 \,\mathrm{d}u - \int \frac{2}{1+u} \,\mathrm{d}u$$
$$= 2u - 2\ln(1+u) = 2\sqrt{1+x} - 2\ln\left(1 + \sqrt{1+x}\right) + C,$$

kde C je integrační konstanta. Definiční obor integrandu je $x \in (-1, +\infty)$, primitivní funkci jsme našli na celém definičním oboru.

[10] 5. Na intervalu $(-2, +\infty)$ spočtěte

$$\int \frac{1}{x^2 (x+2)} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Použijeme rozklad na parciální zlomky. Podle věty o rozkladu na parciální zlomky existují konstanty A, B a C tak, že platí

$$\frac{1}{x^2 (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Zlomky převedeme na společný jmenovatel a výsledkem je

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2}{x^2 (x+2)} = \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B}{x^2(x+2)},$$

odkud plyne, že konstanty A, B a C řeší systém rovnic

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ 2A + B &= 0, \\ 2B &= 1. \end{aligned}$$

Řešením tohoto systému je zjevně $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ a $C = \frac{1}{4}$, což po dosazení vede na integraci

$$\int \frac{1}{x^2 (x+2)} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln|x+2| + E,$$

kde E je integrační konstanta. Primitivní funkci jsme našli na intervalu $(-\infty, -2)$ a na intervalu $(-2, 0)$ a na intervalu $(0, +\infty)$, přičemž integrační konstanta se na jednotlivých intervalech může lišit. Integrand není definován v bodech $x = 0$ a $x = -2$, z čehož plyne, že je zbytečné pokoušet se o “navázání” primitivních funkcí tak, abychom měli jednu primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$.

[20] 6. Spočtěte

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:
Výraz $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ je evidentně nezáporný, stačí tedy požadovat $x \neq -1$. Definiční obor integrandu je tudíž $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme technický výpočet za použití substituce

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} &= x+t, \\ x &= \frac{t^2-1}{1-2t}, \\ \mathrm{d}x &= -2\frac{t^2-t+1}{(-1+2t)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

výsledkem je

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= -2\int \frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+1\right)\left(\frac{t^2-1}{1-2t}+t\right)} \frac{-t+t^2+1}{(-1+2t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int \frac{-t+t^2+1}{(t^2-1+2-2t)(t^2-1+t(1-2t))}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t(t-2)}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

poslední integrál spočteme rozkladem na parciální zlomky

$$\int \frac{2}{t(t-2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \ln|t-2| + \ln|t|,$$

přepsáním výsledku do původních proměnných dostaneme

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right| + \ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x\right| + C.$$

Primitivní funkce je definována všude kromě $x \neq -1$, vztah $F'(x) = f(x)$ platí na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

K výpočtu lze použít i další substituce, jmenovitě

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} &= x-t, \\ x &= \frac{t^2-1}{1+2t}, \\ \mathrm{d}x &= -2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t, \\ \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{t(t+2)}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} &= 1+tx, \\ x &= \frac{1-2t}{t^2-1}, \\ \mathrm{d}x &= 2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}, \\ \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{t(t-2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

případně

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} &= 1-tx, \\ x &= \frac{1+2t}{t^2-1}, \\ \mathrm{d}x &= -2\frac{t^2+t+1}{(t^2-1)^2}, \\ \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{2}{t(t+2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$