Noé de Rancourt noe.de.rancourt@ens.fr
Bureau T9A, toits du DMA http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

Équivalence entre les définitions des opérations ordinales

Ceci est une preuve de l'équivalence entre les deux définitions des opérations ordinales vues en cours, écrite initialement pour un corrigé de TD de l'an dernier. Seul les preuves concernant l'addition et la multiplications sont écrites, puisque celle pour l'exponentiation n'avait pas été abordée en TD ; néanmoins, elle est assez similaire.

On a deux définitions des opérations : l'une par opérations sur les ordres et isomorphisme, et l'autre par récurrence. Comme on a unicité des fonctions définies par récurrence sur les ordinaux, pour montrer que les deux définitions coïncident, il suffit donc de montrer que les opérations définies par isomorphisme satisfont aux relations utilisées pour définir les opérations par induction. On notera donc $+$ et $\times$ les opérations définies par opérations sur les ordres et isomorphisme, et on devra montrer que pour tous ordinaux α et β, et tout ordinal limite λ, on a :

- $\alpha + 0 = \alpha$ et $\alpha \times 0 = 0$;
- $\alpha + \mathrm{s}(\beta) = \mathrm{s}(\alpha + \beta)$ et $\alpha \times \mathrm{s}(\beta) = \alpha \times \beta + \alpha$;
- $\alpha + \lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$ et $\alpha \times \lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha \times \beta)$,

où $s(\xi)$ désignera ici le successeur de l'ordinal ξ (on n'a pas encore démontré que c'était égal à $\xi + 1$).

Pour éviter les conflits de notations, on notera ici $\dot{+}$ et $\dot{\times}$ les opérations de somme et produit sur les ordres. On les définira ici, pour $(X, <)$ et $(Y, <)$ des ensembles ordonnés, de la façon suivante :

- $X \dot{+} Y$ a pour ensemble de base $X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$, et l'ordre dessus est défini par $(u, \delta) < (v, \varepsilon) \Leftrightarrow (\delta < \varepsilon \vee (\delta = \varepsilon \wedge u < v))$;
- $X \dot{\times} Y$ a pour ensemble de base $X \times Y$ est l'ordre dessus est l'ordre anti-lexicographique, défini par $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2 \vee (y_1 = y_2 \wedge x_1 < x_2))$.

De cette façon, $\alpha + \beta$ est défini comme l'unique ordinal isomorphe à la somme ordonnée $\alpha \dot{+} \beta$, et $\alpha \times \beta$ est l'unique ordinal isomorphe au produit ordonné $\alpha \dot{\times} \beta$. Vérifions maintenant les six relations de réccurence ci-dessus.

Addition, initialisation.

On a un isomorphisme $\alpha \dot{+} 0 \longrightarrow \alpha$ donné par $(\xi, 0) \longmapsto \xi$. Les ordinaux $\alpha + 0$ et α sont donc isomorphes, donc égaux. (Ici, on utilise le fait que deux ordinaux isomorphes sont forcément égaux.)

Addition, cas successeur.

Il suffit de montrer d'une part, que pour tout ordinal ξ, on a $\mathrm{s}(\xi) = \xi + 1$, et d'autre part, que la somme $+$ est associative.

Pour $\mathrm{s}(\xi) = \xi + 1$, on a un isomorphisme φ entre $\mathrm{s}(\xi) = \xi \cup \{\xi\}$ et $\xi \dot{+} 1$ défini par $\varphi(\zeta) = (\zeta, 0)$ pour $\zeta < \xi$, et $\varphi(\xi) = (0, 1)$. Les ordinaux $\mathrm{s}(\xi)$ et $\xi + 1$ sont donc isomorphes, donc égaux.

Pour l'associativité de la somme, il suffit de montrer que la somme ordonnée est associative à isomorphisme près ; ainsi, on aura, pour tous ordinaux α, β, et γ, que $\alpha + (\beta + \gamma) \cong \alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma) \cong (\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \gamma \cong (\alpha + \beta) + \gamma$, et donc $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (le symbole $\cong$ désigne la relation "être isomorphe"). On se donne donc trois ensembles ordonnés X, Y et Z et on montre que $X \dot{+} (Y \dot{+} Z) \cong$

$(X \dotplus Y) \dotplus Z$. En terme d'ensembles de base, on a $X \dotplus (Y \dotplus Z) = X \times \{0\} \cup Y \times \{(0,1)\} \cup Z \times \{(1,1)\}$ et $(X \dotplus Y) \dotplus Z = X \times \{(0,0)\} \cup Y \times \{(1,0)\} \cup Z \times \{1\}$; l'application :

$$\begin{array}{ccc} X \dotplus (Y \dotplus Z) & \longrightarrow & (X \dotplus Y) \dotplus Z \\ (u,0) & \longmapsto & (u,0,0) \\ (u,0,1) & \longmapsto & (u,1,0) \\ (u,1,1) & \longmapsto & (u,1) \end{array}$$

est donc une bijection, et on vérifie à l'aide de la définition des ordres sur les deux ensembles qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Addition, cas limite.

On montre que $\alpha + \lambda = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$ en montrant les deux inégalités.

Pour $\sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta) \leqslant \alpha + \lambda$, on se donne un $\beta < \lambda$ et on montre que $\alpha + \beta < \alpha + \lambda$. Comme $\beta < \lambda$, β est un segment initial strict de λ, donc $\alpha \dotplus \beta$ est un segment initial strict de $\alpha \dotplus \lambda$. On en déduit que $\alpha + \beta$ est isomorphe à un segment initial strict de $\alpha + \lambda$, donc $\alpha + \beta < \alpha + \lambda$. (Ici, on utilise le fait que $\xi < \zeta$ si et seulement si ξ est isomorphe à un segment initial strict de ζ.) Remarquons que ce paragraphe montre en fait que la somme ordinale est strictement croissante à droite.

Pour $\alpha + \lambda \leqslant \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$, il suffit de montrer que pour tout $\gamma < \alpha + \lambda$, il existe $\beta < \lambda$ tel que $\gamma \leqslant \alpha + \beta$. On fixe donc un tel γ. γ est un segment initial strict de $\alpha + \lambda$, donc il est isomorphe à un segment initial strict S de $\alpha \dotplus \lambda = \alpha \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$. Il y a alors deux cas possibles :

- Soit S est de la forme $\delta \times \{0\} = \delta \dotplus 0$ pour un certain segment initial strict δ de α. δ est alors un ordinal strictement inférieur à α, et il est isomorphe à S, donc à γ ; donc $\gamma = \delta$. On a donc $\gamma \leqslant \alpha + 0$, et prendre $\beta = 0$ convient.
- Soit S est de la forme $\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} = \alpha \dotplus \beta$ pour un certain segment initial strict β de λ. β est alors un ordinal strictement inférieur à λ, et on a $\gamma \cong S \cong \alpha \dotplus \beta \cong \alpha + \beta$, donc $\gamma = \alpha + \beta$. Ainsi, β est comme voulu.

Multiplication, initialisation.

$\alpha \dot{\times} 0$ est vide, donc $\alpha \times 0$ l'est aussi, donc $\alpha \times 0 = 0$.

Multiplication, cas successeur.

Il suffit de montrer que $\alpha \times 1 = \alpha$, ainsi que la distributivité à droite de la multiplication sur l'addition.

Pour $\alpha \times 1 = \alpha$, remarquons que $\beta \mapsto (\beta, 0)$ définit un isomorphisme de α dans $\alpha \dot{\times} 1$. On conclut comme précédemment.

Pour la distributivité, comme précédemment, il suffit de montrer que pour tous ensembles ordonnés X, Y, et Z, on a $X \dot{\times} (Y \dotplus Z) \cong X \dot{\times} Y \dotplus X \dot{\times} Z$. Or, on vérifie que les ensembles de base de ces deux ensembles ordonnés sont égaux (ils sont égaux à $X \times Y \times \{0\} \cup X \times Z \times \{1\}$) ; on vérifie alors que les définitions des deux ordres précédents coïncident sur cet ensemble, ce qui conclut.

Multiplication, cas limite.

On montre encore les deux inégalités.

Pour $\sup_{\beta<\lambda}(\alpha \times \beta) \leqslant \alpha \times \lambda$, on se donne un $\beta < \lambda$ et on montre que $\alpha \times \beta < \alpha \times \lambda$. On vérifie que $\alpha \dot{\times} \beta$ est un segment initial strict de $\alpha \dot{\times} \lambda$; ainsi, $\alpha \times \beta$ est isomorphe à un segment initial strict de $\alpha \times \lambda$, donc $\alpha \times \beta < \alpha \times \lambda$. Comme précédemment, on a en fait montré ici que la multiplication ordinale était strictement croissante à droite.

Pour montrer que $\alpha \times \lambda \leqslant \sup_{\beta<\lambda}(\alpha \times \beta)$, on fixe $\gamma < \alpha \times \lambda$ et on montre l'existence de $\beta < \lambda$ tel que $\gamma \leqslant \alpha \times \beta$. γ est un segment initial strict de $\alpha \times \lambda$, donc il est isomorphe à un segment initial strict de $\alpha \dot{\times} \lambda$ que l'on notera S. Soit $\beta = \{\xi < \lambda \mid \exists \zeta < \alpha \ (\zeta, \xi) \in S\}$. Alors β est un segment initial de λ ; de plus, comme λ est limite, alors β est un segment initial strict (en effet, on vérifie que si $(\zeta, \xi) \in (\alpha \dot{\times} \lambda) \backslash S$, alors $\xi + 1 \notin \beta$). β est donc un ordinal strictement inférieur à λ ; de plus, $S \subseteq \alpha \dot{\times} \beta$. γ est donc isomorphe à un segment initial de $\alpha \dot{\times} \beta$, donc de $\alpha \times \beta$, donc $\gamma \leqslant \alpha \times \beta$ comme voulu.