Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 1 : Ensembles, ordres et ordinaux

29 septembre et 2 octobre 2017

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

Les questions 1, 2 et 3 de l'exercice 5 sont à préparer avant le TD et seront corrigés tout au début de la séance.

I. Équipotence

♦ **Exercice 1.**

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables, équipotents à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ni l'un, ni l'autre ?

1. Une partie infinie de $\mathbb{N}$;
2. L'ensemble $\mathbb{N}^2$;
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$;
4. L'ensemble $\mathbb{R}$;
5. L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers ;
6. L'ensemble des suites de rationnels qui convergent vers 0 ;
7. L'ensemble des suites de rationnels qui sont constantes à partir d'un certain rang ;
8. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
9. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

II. Ensembles ordonnés

♦ **Exercice 2** (Ordres bien-fondés, bons ordres)**.**

1. Soit $(X, <)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que X est fini si et seulement si $(X, <)$ et $(X, >)$ sont tous les deux bien ordonnés.
2. Soit X un ensemble. Donner une condition nécessaire et suffisante sur X pour que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ soit bien-fondé.

Exercice 3 (Plongements)**.**

Un plongement d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application (injective) $f : X \to Y$ telle que $\forall x, x' \in X\ (f(x) < f(x') \Leftrightarrow x < x')$ (autrement dit, c'est un isomorphisme entre X et une partie de Y).

1. Montrer que tout ordre total au plus dénombrable se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Caractériser les bons ordres qui se plongent dans $(\mathbb{R}, <)$.

III. Ordinaux

♦ **Exercice 4** (Points fixes)**.**

On dit qu'une classe fonctionnelle [1] croissante F des ordinaux dans les ordinaux est *continue* si pour tout ordinal limite λ, on a $F(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$ (cette notion correspond exactement à la notion usuelle de continuité quand la classe des ordinaux est munie de la topologie de l'ordre).

1. Soit F croissante et continue telle que pour tout ordinal α, on ait $F(\alpha) \geqslant \alpha$. Montrer que pour tout α, il existe un point fixe de F supérieur ou égal à α.
2. Soient $\mathcal{F}$ un ensemble quelconque de classes fonctionnelles [2] satisfaisant les hypothèse de la question 1, et α un ordinal. Montrer qu'il existe un ordinal $\beta \geqslant \alpha$ qui est un point fixe commun à tous les éléments de $\mathcal{F}$.

♦ **Exercice 5** (Opérations sur les ordinaux)**.**

Dans cet énoncé, on notera exceptionnellement $\mathrm{s}(\alpha)$ le successeur de l'ordinal α. On définit l'addition et la multiplication des ordinaux de la façon suivante :

- Pour α fixé, la somme $\alpha + \beta$ est définie par induction sur β par :
  - $\alpha + 0 = \alpha$;
  - $\alpha + \mathrm{s}(\beta) = \mathrm{s}(\alpha + \beta)$;
  - Si β est limite, $\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha + \gamma$.
- Pour α fixé, le produit $\alpha + \beta$ est définie par induction sur β par :
  - $\alpha \cdot 0 = 0$;
  - $\alpha \cdot \mathrm{s}(\beta) = \alpha\beta + \alpha$;
  - Si β est limite, $\alpha\beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha\gamma$.

1. Montrer que la somme et le produit son strictement croissantes en leur second argument (en supposant que le premier argument est non-nul, pour le produit). Montrer que le produit est distributif à droite sur la somme (i.e. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$).
2. Que vaut $2 \cdot (\omega + 1) + \omega$? Et $\omega + \omega \cdot \omega$?
3. Montrer que si $\alpha \leqslant \beta$, alors il existe un unique γ tel que $\alpha + \gamma = \beta$.
4. Montrer l'existence et l'unicité de la division euclidienne ordinale : si α est un ordinal et β un ordinal non-nul, il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta\gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.

---

1. On va dire pour l'instant qu'une *classe fonctionnelle*, c'est exactement la même chose qu'une fonction, sauf qu'on n'impose pas que son domaine soit un ensemble. Vous comprendrez un peu mieux pourquoi on fait cette distinction à la fin du cours, au mois de janvier.

2. Attention, ce que je dis n'est pas du tout rigoureux, ne le répétez pas à vos parents. On verra comment écrire ça plus proprement en janvier.

♣ **Exercice 6** (Arbres bien-fondés)**.**

On note $\omega^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} \omega^n$ l'ensemble des suites finies d'éléments de ω. On rappelle qu'une suite (finie ou infinie) d'éléments de ω est une application s d'un ordinal $n \leqslant \omega$ dans ω, qui sera aussi notée $(s_i)_{i<n}$, et qu'à ce titre, la restriction de la suite s à l'ordinal $m \leqslant n$, notée $s_{\restriction m}$, est la suite $(s_i)_{i<m}$; et qu'étant données deux suites s et t ; on a l'inclusion $s \subseteq t$ lorsque $s = t_{\restriction \mathrm{dom}(s)}$. Étant donnés deux suites finies $s = (s_i)_{i<n}$ et $t = (t_i)_{i<m}$, on notera $s \frown t = (s_0, ..., s_{n-1}, t_0, ..., t_{m-1})$ leur concaténation.

Un *arbre* sur ω est un sous ensemble $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tel que pour tout $s \in T$ et tout $t \subseteq s$, on ait $t \in T$. L'arbre T est dit *bien-fondé* si l'ensemble ordonné $(T, \supset)$ est bien-fondé. Une *branche infinie* de T est une suite infinie $x \in \omega^\omega$ telle que pour tout $n < \omega$, on ait $x_{\restriction n} \in T$.

1. Montrer qu'un arbre est bien-fondé si et seulement s'il ne possède pas de branche infinie.

   Pour $A \subseteq \omega^{<\omega}$, on note A' l'ensemble des $s \in A$ qui ne sont pas des éléments minimaux de A pour l'inclusion inverse $\supset$. On définit par récurrence sur l'ordinal α l'ensemble $A^{(\alpha)}$ de la façon suivante :
   – $A^{(0)} = A$;
   – $A^{(\alpha+1)} = \left(A^{(\alpha)}\right)'$;
   – Si α est limite, alors $A^{(\alpha)} = \bigcap_{\xi<\alpha} A^{(\xi)}$.
   Dans la suite de l'exercice, on fixe $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un arbre.

2. (a) Montrer pour tout ordinal α, l'ensemble $T^{(\alpha)}$ est un arbre.

   (b) Montrer qu'il existe un ordinal au plus dénombrable α tel que pour tout $\beta \geqslant \alpha$, on ait $T^{(\beta)} = T^{(\alpha)}$.

   (c) Montrer que, pour l'ordinal α défini à la question précédente, T est bien-fondé si et seulement si $T^{(\alpha)} = \varnothing$.

   Si T est un arbre bien fondé, on appellera *rang* de T et on notera $\rho(T)$ le plus petit ordinal α tel que $T^{(\alpha)} = \varnothing$. On supposera désormais que l'arbre T est bien-fondé.

3. (a) Montrer que $\rho(T)$ est successeur.

   Pour $n \in \omega$, on notera $T_n = \{t \in \omega^{<\omega} \mid (n) \frown t \in T\}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \omega$, T_n est un arbre bien-fondé, et exprimer $\rho(T)$ en fonction des $\rho(T_n)$ pour $n \in \omega$.

   (c) Montrer que pour tout ordinal successeur au plus dénombrable α, il existe un arbre bien-fondé $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tel que $\rho(T) = \alpha$.

♣ **Exercice 7** (Un théorème de Hausdorff)**.**

Dans cet exercice, on notera α^* l'ordinal α « renversé », c'est-à-dire l'ensemble ordonné tel que $(\alpha^*, <) \cong (\alpha, >)$. On rappelle que si $(X, <)$ est un ensemble ordonné et $(Y_x, <_x)_{x\in X}$ une famille d'ensembles ordonnés indexée par X, la somme ordonnée de cette famille, notée $\sum_{x\in X} Y_x$, est l'union disjointe $\bigcup_{x\in X} \{x\} \times Y_x$ ordonnée par $(x, y) < (x', y')$ ssi $x < x'$ ou $x = x'$ et $y < y'$ (cela correspond à l'idée intuitive de mettre les ensembles Y_x « bout-à-bout » suivant l'ordre X). Si X et tous les Y_x sont totalement ordonnées, la somme ordonnée l'est également.

On dira qu'un ensemble totalement ordonné X est *dispersé*[3] si $\mathbb{Q}$ (muni de l'ordre usuel) ne se plonge pas dans X. On définit une suite $(\mathcal{S}_\alpha)$ de classes d'ordres totaux, indexée par les ordinaux, de la façon

3. Le terme anglais est *scattered* ; le terme *dispersé* est la traduction couramment utilisée par les membres de l'équipe d'analyse fonctionnelle de Jussieu, mais je ne suis pas sûr que ce soit la traduction française canonique.

suivante : $\mathcal{S}_0$ a pour unique élément l'ensemble ordonné $\{0\}$ à un élément, et pour $\alpha \geqslant 1$, $\mathcal{S}_\alpha$ est la classe des ordres de la forme $\sum_{\zeta\in\xi} X_\zeta$ ou $\sum_{\zeta\in\xi^*} X_\zeta$, où $(X_\zeta)_{\zeta\in\xi}$ et $(X_\zeta)_{\xi\in\xi^*}$ sont des familles d'ordres appartenant tous à $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{S}_\beta$. On notera $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{O}n} \mathcal{S}_\alpha$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant dû à Hausdorff : $\mathcal{S}$ est exactement la classe des ordres dispersés.

1. Montrer que tout élément de $\mathcal{S}$ est un ordre dispersé.
2. On veut maintenant montrer la réciproque. Dans les questions qui suivent, on fixe $(X,<)$ un ensemble ordonné dispersé. Pour $x, y \in X$, on pose $x \sim y$ si $x = y$ ou si celui des deux intervalles $]x, y[$ ou $]y, x[$ qui est non-vide, muni de l'ordre induit par X, est un ensemble ordonné appartenant à $\mathcal{S}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence dont les classes sont des intervalles de X.
3. Montrer que les classes de $\sim$, munies de l'ordre induit par X, sont des éléments de $\mathcal{S}$. (On pourra utiliser le fait que la classe des ordinaux ne s'injecte dans aucun ensemble.)
4. On note $(Y,<)$ le quotient de $(X,<)$ par $\sim$ (c'est l'ensembles des classes d'équivalences, ordonné par $U < V \Leftrightarrow \forall u \in U\, \forall v \in V\ u < v$; si l'on n'en est pas convaincu, on pourra vérifier que ceci définit correctement une relation d'ordre total sur Y). Montrer que l'ensemble ordonné Y est dense (c'est-à-dire que pour tous $u, v \in Y$ avec $u < v$, il existe $w \in Y$ avec $u < w < v$).
5. Montrer que si $(Y,<)$ est un ensemble totalement ordonné dense possédant au moins deux éléments, alors $\mathbb{Q}$ se plonge dans Y.
6. Conclure que X est dans $\mathcal{S}$.