Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

Corrigé du TD de Logique 1 : Ensembles, ordres et ordinaux

29 septembre et 2 octobre 2017

Exercice 1.

1. A est dénombrable. Rappelons que par définition, $\mathbb{N} = \omega$. Si $A \subseteq \omega$ est infini, alors $(A, <)$ est isomorphe à un ordinal $\alpha \leqslant \omega$, qui comme A, est infini. On a donc forcément $\alpha = \omega$, et donc A est en bijection avec ω.

   Remarquons que la preuve "intuitive" qui consiste à construire une bijection en construisant par récurrence une énumération strictement croissante de A revient précisément à refaire la preuve que tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal dans ce cas particulier.

2. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. En effet, $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (m,n) & \longmapsto & 2^m(2n+1)-1 \end{array}$ est une bijection.

3. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En effet, l'application qui à un rationnel associe son écriture sous forme de fraction irréductible est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. De plus, $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ via $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \end{array}$; par la question précédente, $\mathbb{Q}$ s'injecte donc dans $\mathbb{N}$. Réciproquement, $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$, ce qui permet de conclure par Cantor-Bernstein.

4. $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; on montre la double injection et on conclut par Cantor-Bernstein. Dans toute la suite, on identifiera abusivement $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ à $2^{\mathbb{N}}$, en confondant une partie de $\mathbb{N}$ avec sa fonction caractéristique. $2^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ via :

   $$\begin{array}{ccc} 2^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon_n}{3^n} \end{array} ;$$

   et $\mathbb{R}$ est en bijection avec $]0,1[$ via $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan$, cet intervalle s'injectant lui-même dans $2^{\mathbb{N}}$, en associant à chaque nombre son unique écriture en base 2 ne se terminant pas par un nombre cofini de 1. Une autre solution pour l'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est d'associer à chaque réel sa *coupure de Dedekind* : on a une injection

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ x & \longmapsto & \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \end{array}$$

   (l'image d'un réel par cette injection est appelé la coupure de Dedekind de ce réel). Puis on conclut avec la question 3.

5. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est équipotent par $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dans la suite de cette exercice, on utilisera respectivement les symboles $\sim$ et $\hookrightarrow$ pour dire "est équipotent à" et "s'injecte dans". $2^{\mathbb{N}}$ est inclus dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; réciproquement, on a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$. La bijection $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est la suivante : à une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$, on associe la fonction $\tilde{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow 2$ définie par $\tilde{f}(m,n) = f(m)(n)$. Remarquons que cette méthode permet, pour tous ensembles X, Y, et Z, de constuire une bijection entre $(X^Y)^Z$ et $X^{(Y\times Z)}$.

6. Cet ensemble, que l'on notera A, est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En effet, on a d'une part $A \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en utilisant les questions 3 et 5 ; d'autre part, $2^{\mathbb{N}}$ se plonge dans A via $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (\frac{\varepsilon_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Cet ensemble, que l'on notera B, est dénombrable. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons B_n l'ensemble des suites de rationnels qui sont constantes à partir du rang n. Alors $B_n \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}^{n+1}$ par la question 3, puis une récurrence immédiate utilisant le résultat de la question 2 nous montre que cet ensemble est dénombrable. B est donc une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable.
8. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En effet dans les deux cas, il s'injecterait dans $\mathbb{R}$ par la question 4 ; or, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, identifié à $2^{\mathbb{R}}$, s'injecte dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, mais $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne s'injecte pas dans $\mathbb{R}$, par théorème de Cantor.

   On peut en fait montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
9. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, noté ici $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En effet, $\mathbb{R}$ s'y injecte (à un réel, on associe la fonction constante de valeur ce réel) ; d'autre part, une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathbb{Q}$, et on a donc $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.

1. Si X est fini, alors il n'existe pas de suite infinie injective d'éléments de $(X,<)$, donc en particulier pas de suite infinie strictement décroissante ; $(X,<)$ est donc bien ordonné. On montre de même que $(X,>)$ est bien ordonné.

   Réciproquement, supposons $(X,<)$ infini et bien ordonné, et montrons que $(X,>)$ n'est pas bien ordonné. On définit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \min(X\backslash\{x_i \mid i < n\})$. (L'ensemble dont on prend le minimum est toujours non-vide puisque X est infini, donc la suite est bien définie.) Alors la partie $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $(X,>)$ ne possède pas de minimum, donc $(X,>)$ n'est pas bien fondé.
2. $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ est bien fondé si et seulement si X est fini. En effet, si X est fini et $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, alors A possède un élément de cardinal minimal, qui se trouve être minimal pour l'inclusion. Réciproquement, si X est infini, en notant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite injective d'élements de X, la suite $(X\backslash\{x_i \mid i < n\})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ est strictement décroissante pour l'inclusion, et donc $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ n'est pas bien fondé.

Exercice 3.

1. Soit $(X,<)$ un ensemble totalement ordonné dénombrable ; on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumeration (injective) des éléments de X. On définit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application de $\{x_i \,|\, i < n\}$ dans $\{y_i \,|\, i < n\}$ qui à x_i associe y_i pour tout $i < n$ soit un isomorphisme, comme suit. On choisit $y_0 \in \mathbb{Q}$ quelconque. Les y_i ayant été construits pour $i < n$, on note A l'ensemble des $i < n$ tels que $x_i < x_n$, et B l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $x_i > x_n$. On a, pour tous $i \in A$ et $j \in B$, que $x_i < x_j$, donc aussi que $y_i < y_j$ par l'hypothèse de récurrence (hypothèse d'isomorphisme). Si $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, on pourra alors choisir y_n strictement compris entre le plus grand des y_i pour $i \in A$ et le plus petit des y_j pour $j \in B$; si $A = \varnothing$, on choisira y_n plus petit que tous les y_i déjà construits ; et si si $B = \varnothing$, on choisira y_n plus grand que tous les y_i déjà construits. Cette construction maintient clairement l'hypothèse de récurrence satisfaite.

   Maintenant, on considère $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f(x_i) = y_i$; par construction, f est un plongement.

2. Par la question précédente, tout bon ordre au plus dénombrable se plonge dans $\mathbb{Q}$, donc dans $\mathbb{R}$. Montrons réciproquement que si $f : (X, <) \longrightarrow (\mathbb{R}, <)$ est un plongement d'un bon ordre dans $\mathbb{R}$, alors X est au plus dénombrable. On notera X' l'ensemble X privé de son éventuel élément maximal, et pour tout $x \in X'$ on posera, x^+ le successeur de x (c'est-à-dire le plus petit élément de X strictement supérieur à x). Pour tout $x \in X'$, l'intervalle ouvert $]f(x), f(x^+)[$ est non-vide, donc contient un rationnel $g(x)$; on a ainsi défini une injection $g : X' \longrightarrow \mathbb{Q}$, ce qui montre que X est au plus dénombrable, et donc X aussi.

Exercice 4.

1. On définit par récurrence une suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ en posant $\alpha_0 = \alpha$ et pour tout $n < \omega$, $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$. On pose $\alpha_\omega = \sup_{n<\omega} \alpha_n$. Par l'hypothèse sur F, la suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ est croissante et on a $\alpha_\omega \geqslant \alpha$. Et α_ω est point fixe de F : en effet, par continuité de F, on a $F(\alpha_\omega) = \sup_{n<\omega} F(\alpha_n) = \sup_{n<\omega} \alpha_{n+1} = \alpha_\omega$.
2. On définit par récurrence une suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ en posant $\alpha_0 = \alpha$ et pour tout $n < \omega$, $\alpha_{n+1} = \sup_{F\in\mathcal{F}} F(\alpha_n)$. On pose $\beta = \sup_{n<\omega} \alpha_n$. Comme dans la question 1, la suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ est croissante et on a $\beta \geqslant \alpha$. Et pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $F(\beta) = \sup_{n<\omega} F(\alpha_n) \leqslant \sup_{n<\omega} \alpha_{n+1} = \beta$; l'inégalité inverse vient de l'hypothèse sur F, et donc β est bien un point fixe de F.

Exercice 5.

1. *Stricte croissance à droite de la somme.* Fixons un ordinal α. On montre par récurrence sur l'ordinal γ le résultat suivant : pour tout $\beta < \gamma$, on a $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$. Le cas $\gamma = 0$ est immédiat. Si $\gamma = \mathrm{s}(\delta)$, alors pour $\beta < \gamma$, on a, si $\beta < \delta$, $\alpha+\beta < \alpha+\delta < \mathrm{s}(\alpha+\delta) = \alpha+\gamma$, et on a comme on vient de le voir $\alpha+\delta < \alpha+\gamma$. Et si γ est limite, alors pour $\beta < \gamma$, on a $\alpha+\beta < \alpha+s(\beta) \leqslant \sup_{\delta<\gamma} \alpha+\delta = \alpha+\gamma$.

   Stricte croissance à droite du produit. Fixons un ordinal $\alpha > 0$. On montre par récurrence sur l'ordinal γ le résultat suivant : pour tout $\beta < \gamma$, on a $\alpha\beta < \alpha\gamma$. Le cas $\gamma = 0$ est immédiat. Si $\gamma = \mathrm{s}(\delta)$, alors pour $\beta < \gamma$, on a, si $\beta < \delta$, $\alpha\beta < \alpha\delta < \alpha\delta + \alpha = \alpha\gamma$ (où on a utilisé la croissance stricte à droite de la somme pour la deuxième inégalité), et on a comme on vient de le voir $\alpha\delta < \alpha\gamma$. Et si γ est limite, alors pour $\beta < \gamma$, on a $\alpha\beta < \alpha s(\beta) \leqslant \sup_{\delta<\gamma} \alpha\delta = \alpha\gamma$.

   Distributivité à droite de la somme sur le produit. Fixons des ordinaux α et β ; On montre par récurrence sur l'ordinal γ que $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. On a $\alpha(\beta+0) = \alpha\beta = \alpha\beta + 0 = \alpha\beta + \alpha\cdot 0$. Si $\gamma = \mathrm{s}(\delta)$, alors $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\,\mathrm{s}(\beta+\delta) = \alpha(\beta+\delta) + \alpha = \alpha\beta + \alpha\delta + \alpha = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Supposons maintenant γ limite. Alors $\beta+\gamma = \sup_{\delta<\gamma} \beta+\delta$, donc cet ordinal est limite : en effet, l'ensemble $\{\beta+\delta \mid \delta < \gamma\}$ n'a pas de max puisque si $\delta < \gamma$, alors $\mathrm{s}(\delta) < \gamma$ et $\beta+\delta < \beta+\mathrm{s}(\delta)$. On a donc $\alpha(\beta+\gamma) = \sup_{\varepsilon<\beta+\gamma} \alpha\varepsilon = \sup_{\delta<\gamma} \alpha(\beta+\delta)$, la dernière égalité utilisant la croissance à droite du produit. Une méthode similaire permet de montrer que $\alpha\beta + \alpha\gamma = \sup_{\delta<\gamma} \alpha\beta + \alpha\delta$. Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse d'induction pour conclure.
2. En utilisant l'associativité de la somme et la distributivité à droite du produit sur la somme, on a $2(\omega+1) + \omega = (2\omega) + (2+\omega)$. Or, $2\omega = \sup_{n<\omega} 2n = \omega$, et $2+\omega = \sup_{n<\omega} 2+n = \omega$. Donc $2(\omega+1)+\omega = \omega+\omega = \omega\cdot 2$.

   On a $\omega + \omega\cdot\omega = \omega\cdot 1 + \omega\cdot\omega = \omega(1+\omega) = \omega\cdot\omega$.
3. L'unicité vient du fait que pour tout α, l'application $\delta \mapsto \alpha+\delta$ est strictement croissante, donc injective. Montrons l'existence ; soient $\alpha \leqslant \beta$ des ordinaux. Commençons par voir que par stricte croissance de $\delta \mapsto \alpha+\delta$, on a pour tout δ que $\alpha+\delta \geqslant \delta$, et en particulier $\alpha+\delta > \beta$ pour tout $\delta > \beta$. On peut donc définir correctement $\gamma = \sup\{\delta \mid \alpha+\delta \leqslant \beta\}$; on a alors $\alpha+\gamma = \sup\{\alpha+\delta \mid \alpha+\delta \leqslant \beta\} \leqslant \beta$. D'autre part, par maximalité de γ, on a $\mathrm{s}(\alpha+\gamma) = \alpha+\mathrm{s}(\gamma) > \beta$, donc $\alpha+\gamma \geqslant \beta$, donc γ est comme voulu.

4. La division euclidienne a été vue en cours, néanmoins je reproduis quand même la preuve ici.

   Existence. Une preuve similaire à celle de la question précédente montre que $\beta < \alpha(\beta+1)$, donc on peut considérer l'ordinal ξ minimal tel que $\beta < \alpha\xi$. Si ξ était limite, on aurait $\beta < \alpha\xi = \sup_{\zeta<\xi} \alpha\zeta$, et donc il existerait $\zeta < \xi$ tel que $\beta < \alpha\zeta$, contredisant la minimalité de ξ. On a donc $\xi = \gamma + 1$ pour un certain ordinal γ. Par minimalité de ξ, on a $\alpha\gamma \leqslant \beta < \alpha(\gamma + 1)$. Soit δ l'ordinal tel que $\beta = \alpha\gamma + \delta$. Alors $\delta < \alpha$; en effet, sinon on aurait $\beta \geqslant \alpha\gamma + \alpha = \alpha(\gamma + 1)$, contredisant l'encadrement précédent. Le couple (γ, δ) est donc comme voulu.

   Unicité. Si $\beta = \alpha\gamma + \delta$ avec $\delta < \alpha$, alors $\alpha\gamma \leqslant \beta < \alpha\gamma + \alpha = \alpha(\gamma + 1)$. Par croissance de la classe fonctionnelle $\gamma \mapsto \alpha\gamma$, l'ordinal γ satisfaisant l'encadrement $\alpha\gamma \leqslant \beta < \alpha(\gamma + 1)$ est unique, donc γ est entièrement déterminé par α et β. Ensuite, l'application $\delta \mapsto \alpha\gamma + \delta$ étant strictement croissante donc injective, l'ordinal δ est donc entièrement déterminé par α, β et γ, donc par α et β.