Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 3 : Cardinaux, théorie de Ramsey

13 et 16 octobre 2017

Les exercices marqués du symbole ⧫ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

L'exercice 1 est à préparer avant le TD et sera corrigé tout au début de la séance.

I. Cofinalité

⧫ **Exercice 1** (Calcul et manipulation de cofinalités).

1. Calculer les confinalités de $\aleph_{\aleph_{\omega+1}}$ et $\aleph_{\omega^2}$.
2. Soient κ un cardinal régulier et $X \subseteq \kappa$ un ensemble cofinal. Montrer que $(X, <)$ est isomorphe à $(\kappa, <)$.
3. Soient κ et λ deux cardinaux avec $\kappa < \mathrm{cof}(\lambda)$, et $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ croissante. Montrer que f est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 (calcul et manipulation de cofinalités, encore).

1. Soient κ et λ deux cardinaux infinis, montrer que $\mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \lambda$ si et seulement s'il existe une suite $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de cardinaux strictement plus petits que κ telle que $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Attention c'est bien une somme et pas une union...
2. Soient α et β deux ordinaux. On suppose qu'il existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ strictement croissante et cofinale. Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\beta)$. En déduire, en fonction de $\mathrm{cof}(\alpha)$ et de $\mathrm{cof}(\beta)$, les cofinalités de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$.

♣ **Exercice 3** (Clubs et ensembles stationnaires).

Soit $\kappa > \aleph_0$ un cardinal régulier. Un ensemble $C \subseteq \kappa$ est un *club* (comme ***c**losed **unb**ounded*) s'il est cofinal dans κ et si pour tout $A \subset C$, on a $\sup(A) \in C \cup \{\kappa\}$ (cette dernière condition revient à dire que C est fermé pour la topologie de l'ordre). Un ensemble $S \subseteq \kappa$ est dit *stationnaire* s'il intersecte tous les clubs.

1. Soient $\lambda < \kappa$ un cardinal et $(C_\xi)_{\xi<\lambda}$ une famille de clubs de κ. Montrer que $\bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ est un club de κ.

2. Soit $(C_\xi)_{\xi<\kappa}$ une famille de clubs. Montrer que l'intersection diagonale de cette famille, définie par $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi := \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi\}$ est un club.
3. *(Lemme de Fodor)* Soit $S \subseteq \kappa$ un ensemble stationnaire et $f : S \longrightarrow \kappa$ une fonction *régressive*, c'est-à-dire telle que pour tout $\alpha \in S$, on ait $f(\alpha) < \alpha$. Montrer qu'il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq S$ tel que f soit constante sur T (on pourra raisonner par l'absurde).

II. Calcul cardinal

♦ **Exercice 4** (Exponentiation cardinale)**.**

On rappelle que l'*hypothèse du continu généralisée* (HGC) est l'énoncé : « Pour tout cardinal infini κ, $2^\kappa = \kappa^+$ ».

1. Montrer que pour tous cardinaux infinis κ et λ, on a $\kappa^\lambda \leqslant 2^{\max(\kappa,\lambda)}$.
2. Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul, montrer que $(\kappa^+)^\lambda = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$ (on distinguera les cas $\lambda \leqslant \kappa$ et $\lambda \geqslant \kappa^+$).
3. Soient n un entier et λ un cardinal non nul, montrer que $\aleph_n^\lambda = \max(\aleph_n, 2^\lambda)$.
4. On suppose (HGC). Soient κ un cardinal infini et λ un cardinal non nul, montrer que :

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \operatorname{cof}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si } \operatorname{cof}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leqslant \lambda \end{cases}.$$

♦ **Exercice 5** (Partiel 2016)**.**

1. Montrer que pour tout $n < \omega$, on a $\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n \cdot 2^{\aleph_1}$ (on pourra utiliser le fait que pour $n \geqslant 2$, une fonction $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_n$ n'est pas cofinale).
2. En déduire que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

Exercice 6 (Examen 2016)**.**

1. Soit κ un cardinal limite. On note $2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda < \kappa \text{ cardinal}\}$. Montrer que $(2^{<\kappa})^{\operatorname{cof}(\kappa)} = 2^\kappa$. (On pourra, pour une fonction $f : \operatorname{cof}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ strictement croissante et cofinale, considérer la partition $(f(\alpha) \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta))_{\alpha<\operatorname{cof}(\kappa)}$ de κ.)
2. Soit κ un cardinal infini singulier. On suppose qu'il existe un cardinal μ tel qu'on ait $2^\lambda = \mu$ pour tout cardinal $\lambda < \kappa$ assez grand. Montrer que $2^\kappa = \mu$. (On pourra prendre λ tel que $\operatorname{cof}(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa$ et utiliser la question précédente.)

III. Théorie de Ramsey

Dans toute cette partie, on utilisera les définitions et notations suivantes :

Définitions. Pour X un ensemble et ν un cardinal, on note $[X]^\nu$ l'ensemble des parties de X de cardinal ν (on trouve aussi parfois la notation $X^{[\nu]}$).

Pour μ un cardinal, on appelle *coloration de* $[X]^\nu$ *à l'aide de* μ *couleurs* une application $c : [X]^\nu \longrightarrow \mu$. Étant donné une telle coloration, un ensemble $H \subseteq X$ sera dit *homogène* (ou c*-homogène* s'il y a ambiguité) si la restriction de c à $[H]^\nu$ est constante.

Pour κ, λ, μ et ν des cardinaux, on notera $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ l'énoncé « Pour toute coloration de $[\kappa]^\nu$ à l'aide de μ couleurs, il existe $H \subseteq \kappa$ homogène et de cardinal λ ».

⧫ **Exercice 7** (Théorème de Ramsey infini)**.**

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Ramsey infini (le résultat original de Ramsey, démontré en 1929) : pour tous $d, k < \omega$, on a $\aleph_0 \to (\aleph_0)^d_k$. On montre ce résultat par récurrence sur l'entier d.

1. Montrer le résultat pour $d = 0$ et $d = 1$.
2. Soit $d \geqslant 1$; on suppose maintenant le résultat vrai au rang d. On considère une coloration c de $[\mathbb{N}]^{d+1}$ à l'aide de k couleurs. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $M \subseteq \mathbb{N}$ infini tel que $m < M$ (c'est-à-dire que $\forall p \in M\ m < p$), il existe $N \subseteq M$ infini et $i < k$ tel que pour tout $s \in [N]^d$, on ait $c(\{m\} \cup s) = i$.
3. Montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(m_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ainsi que d'une suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in k^\mathbb{N}$ telles que pour tous $i_0, \ldots, i_d \in \mathbb{N}$ avec $i_0 < \ldots < i_d$, on ait $c(\{m_{i_0}, \ldots, m_{i_d}\}) = c_{i_0}$.
4. En déduire l'existence de $H \subseteq \mathbb{N}$ infini et c-homogène.

Exercice 8 (Théorème d'Erdös-Rado)**.**

Cet exercice est l'exercice 3 du partiel de 2015, disponible ici : `www.math.ens.fr/enseignement/telecharger_fichier.php?fichier=1831` (je n'ai pas reproduit l'énoncé ici car je me suis promis de ne jamais faire un sujet de TD de plus de quatre pages). Son but est de démontrer un cas particulier du théorème d'Erdös-Rado, à savoir le fait que, pour κ et λ deux cardinaux infinis tels que $\lambda > 2^\kappa$, on a $\lambda \to (\kappa^+)^2_\kappa$. La preuve est très différente de celle du théorème de Ramsey infini, je vous invite à aller y jeter un œil !

♣ **Exercice 9** (Cardinaux faiblement compacts)**.**

Dans cet exercice, on va étudier quelques propriétés de la relation $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ lorsque κ et λ sont des cardinaux non-dénombrables.

1. Dans cette question, on montre un résultat technique qui servira pour les questions suivantes. Pour α un ordinal, on munit $\{0,1\}^\alpha$ de l'ordre lexicographique $<_\alpha$, défini pour tous $x, y \in \{0,1\}^\alpha$ par $x <_\alpha y$ si et seulement s'il existe $\beta < \alpha$ tel que $x_\beta < y_\beta$ et pour tout $\gamma < \beta$, $x_\gamma = y_\gamma$.

   (a) Montrer que ceci définit bien une relation d'ordre total sur $\{0,1\}^\alpha$.

(b) On veut maintenant montrer le résultat suivant : pour tout ordinal α, si un ordinal ξ se plonge dans $(\{0,1\}^\alpha, <_\alpha)$, alors $|\xi| \leqslant |\alpha| + \aleph_0$. On procède par récurrence sur α. On fixe donc un ordinal α et on suppose le résultat vrai pour tout $\beta < \alpha$.

On fixe f un plongement d'un ordinal ξ dans $\{0,1\}^\alpha$; on notera, pour tout $\eta < \xi$, $f(\eta) = (f_\gamma(\eta))_{\gamma<\alpha}$, et pour tous $\eta < \xi$ et $\beta < \alpha$, on notera $f^\beta(\eta) = (f_\gamma(\eta))_{\gamma<\beta}$. Ceci définit, pour tout $\beta < \alpha$, une application $f^\beta : \xi \longrightarrow \{0,1\}^\beta$. On note également, pour tout $\beta < \alpha$, A_β l'ensemble des ordinaux η avec $\eta + 1 < \xi$, tels que $f_\beta(\eta) < f_\beta(\eta + 1)$ et pour tout $\gamma < \beta$, $f_\gamma(\eta) = f_\gamma(\eta + 1)$.

Montrer que pour tout ordinal $\beta < \alpha$, la restriction de f^β à A_β est un plongement.

(c) En déduire que $|\xi| \leqslant |\alpha| + \aleph_0$ et conclure la récurrence.

2. Soient κ un cardinal infini, et $f : 2^\kappa \longrightarrow \{0,1\}^\kappa$ une bijection. En considérant la coloration c de $[2^\kappa]^2$ à l'aide de deux couleurs définie, pour $\alpha < \beta < 2^\kappa$, par $c(\{\alpha,\beta\}) = 1$ si et seulement si $f(\alpha) <_\kappa f(\beta)$, montrer que $2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)^2_2$.

3. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ est dit *faiblement compact* si $\kappa \rightarrow (\kappa)^2_2$. Il est dit *inaccessible* s'il est régulier et *fortement limite*, c'est-à-dire que pour tout cardinal $\lambda < \kappa$, on a $2^\lambda < \kappa$. Dans cette question, on veut montrer qu'un cardinal faiblement compact est inaccessible.

(a) Soit κ un cardinal singulier, et $f : \mathrm{cof}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ strictement croissante et cofinale. On définit une coloration $c : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$ par, pour $\alpha < \beta < \kappa$, $c(\{\alpha,\beta\}) = 1$ si et seulement si l'intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ contient un $f(\xi)$ pour un certain $\xi < \mathrm{cof}(\kappa)$. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble c-homogène de cardinalité κ ; en déduire qu'un cardinal faiblement compact est régulier.

(b) À l'aide de la question 2, montrer qu'un cardinal faiblement compact est inaccessible.