

TD de Logique 7 : Ultrafiltres, ultraproducts, fonctions primitives récursives

17 et 20 novembre 2017

Les exercices marqués du symbole \blacklozenge sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole \clubsuit sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

Les exercices 1 et 8 sont à préparer avant le TD et seront corrigés tout au début de la séance.

I. Ultrafiltres, ultraproducts

\blacklozenge Exercice 1.

Soient \mathcal{L} un langage, I un ensemble, et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ et $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ deux familles de \mathcal{L} structures. Montrer qu'on a équivalence entre :

- (1) Pour tout ultrafiltre non-principal \mathcal{U} sur I , on a $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / \mathcal{U} \equiv \prod_{i \in I} \mathcal{N}_i / \mathcal{U}$;
- (2) Pour tout \mathcal{L} -énoncé φ , on a $\mathcal{M}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N}_i \models \varphi$ pour tout $i \in I$ sauf éventuellement un nombre fini.

\blacklozenge Exercice 2 (Saturation des ultraproducts).

Soient \mathcal{L} un langage, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, et $A \subseteq \mathcal{M}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -type sur A un ensemble $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{L}_A -formules à n variables libres, qui est *finiment réalisable* (c'est-à-dire que pour tout $\Sigma_0(\bar{x}) \subseteq \Sigma(\bar{x})$ fini, il existe un uplet $\bar{b} \in \mathcal{M}^n$ tel que $\mathcal{M} \models \Sigma_0(\bar{b})$), et qui est maximal parmi les ensembles de formules ayant cette propriété (cette condition de maximalité est utile en général mais ne servira pas dans cet exercice). On dit que le type $\Sigma(\bar{x})$ est *réalisé* dans \mathcal{M} s'il existe $\bar{b} \in \mathcal{M}^n$ tel que $\mathcal{M} \models \Sigma(\bar{b})$.

Étant donné un cardinal κ , la structure \mathcal{M} est dite κ -saturée si pour tout $A \subseteq \mathcal{M}$ avec $|A| < \kappa$, tout type sur A est réalisé.

Soient \mathcal{L} un langage au plus dénombrable, $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{L} -structures, et \mathcal{U} un ultrafiltre non-principal sur \mathbb{N} . Le but de cet exercice est de montrer que la structure $\mathcal{M} = (\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i) / \mathcal{U}$ est \aleph_1 -saturée.

1. Soit $A \subseteq \mathcal{M}$. Montrer qu'on peut enrichir chacun des \mathcal{M}_i en une \mathcal{L}_A -structure de sorte que l'égalité $\mathcal{M} = (\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i) / \mathcal{U}$ soit une égalité de \mathcal{L}_A -structures. En déduire qu'on peut se ramener à montrer que tout type sur \emptyset est réalisé dans \mathcal{M} .

2. On se donne maintenant un n -type $\Sigma(\bar{x})$ sur \emptyset , que l'on écrira comme union croissante d'ensembles finis de \mathcal{L} -formules : $\Sigma(\bar{x}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Sigma_m(\bar{x})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $A_m = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathcal{M}_i \models \exists \bar{x} \Sigma_m(\bar{x})\}$. Montrer que $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de \mathcal{U} .
3. On définit une suite $(\bar{b}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ en choisissant, pour $i \notin A_0$, $\bar{b}^i \in \mathcal{M}_i^n$ quelconque, et pour $i \in A_0$, $\bar{b}^i \in \mathcal{M}_i^n$ tel que $\mathcal{M}_i \models \Sigma_m(\bar{b}^i)$, où $m \in \mathbb{N}$ est maximal tel que $m \leq i$ et $i \in A_m$. Montrer que $\mathcal{M} \models \Sigma([\bar{b}^i]_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U})$.

Exercice 3 (De Bruijn - Erdős par les ultrafiltres).

On rappelle qu'une *coloration* d'un graphe (G, \sim) à l'aide de κ couleurs (où κ est un cardinal) est une application $c : G \rightarrow \kappa$ telle que pour tous $x, y \in G$ avec $x \sim y$, on ait $c(x) \neq c(y)$, et que G est dit κ -colorable s'il existe une coloration de G à l'aide de κ couleurs. Dans le TD n° 4, on a démontré par compacité le résultat suivant : si, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, tous les sous-graphes finis d'un graphe G sont k -colorables, alors G lui-même est k -colorable. Comme ce résultat peut-être montré par compacité, on devrait également pouvoir le prouver en utilisant un ultraproduit ; on va en fait voir, dans cet exercice, que ce résultat peut être prouvé de façon simple avec des ultrafiltres, sans même passer par un ultraproduit.

On considère donc G un graphe, $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $F \subseteq G$ fini, une coloration $c : F \rightarrow k$ du sous-graphe F .

1. Notons $[G]^{<\omega}$ l'ensemble des parties finies de G . Pour tout $x \in G$, on note $A_x = \{F \in [G]^{<\omega} \mid x \in F\}$. Montrer qu'il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur $[G]^{<\omega}$ qui contient tous les A_x pour $x \in G$.
2. Montrer que pour tout $x \in G$, il existe un unique $c(x) < k$ tel que $\{F \in A_x \mid c_F(x) = c(x)\} \in \mathcal{U}$.
3. On a ainsi défini une application $c : G \rightarrow k$. Montrer qu'il s'agit d'une coloration de G .

Exercice 4 (Quantificateur d'ultrafiltre).

Soient X un ensemble, et soit \mathcal{F} un filtre sur X . Pour $P(x)$ une propriété dépendant des éléments de X , on notera $\forall^{\mathcal{F}} x P(x)$ ssi $\{x \in X \mid P(x)\} \in \mathcal{F}$, et $\exists^{\mathcal{F}} x P(x)$ si $\forall A \in \mathcal{F} \exists x \in A P(x)$ (ces notations ne sont pas standard).

1. Existe-t-il un filtre \mathcal{F} sur X tel que $\forall^{\mathcal{F}} = \forall$ et $\exists^{\mathcal{F}} = \exists$?
2. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de X . Montrer que $\neg \forall^{\mathcal{F}} x P(x) \Leftrightarrow \exists^{\mathcal{F}} x \neg P(x)$, que $\forall^{\mathcal{F}} x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall^{\mathcal{F}} x P(x) \wedge \forall^{\mathcal{F}} x Q(x))$, et que $\exists^{\mathcal{F}} x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists^{\mathcal{F}} x P(x) \vee \exists^{\mathcal{F}} x Q(x))$.
3. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre sur X . Montrer que $\forall^{\mathcal{U}} = \forall$. L'énoncé $\forall^{\mathcal{U}} x P(x)$ sera alors simplement notée $\mathcal{U}x P(x)$ (notation standard, pour le coup).
4. Que signifie $\mathcal{U}x P(x)$ si \mathcal{U} est un ultrafiltre principal ?

♣ **Exercice 5** (Convergence d'ultrafiltres).

1. Soient X un ensemble, \mathcal{F} un filtre sur X , Y un espace topologique séparé, et $f : X \rightarrow Y$. Montrer qu'il existe au plus un $l \in Y$ tel que l'image réciproque par f de tout voisinage de l soit dans \mathcal{F} . Si un tel l existe, on l'appelle la limite selon \mathcal{F} de la fonction f , et elle est notée $\lim_{x \rightarrow \mathcal{F}} f(x)$.
2. À quoi correspond $\lim_{x \rightarrow \mathcal{F}} f(x)$ dans les cas suivants ?
 - (a) Le cas où $X = \mathbb{N}$ et \mathcal{F} est le filtre de Fréchet ;

- (b) Le cas où X est un espace topologique, et \mathcal{F} est le filtre des voisinages d'un $x_0 \in X$;
- (c) Le cas où \mathcal{F} est l'ultrafiltre principal engendré par un $x_0 \in X$.

3. Soit Y un espace topologique séparé. Montrer l'équivalence entre :

- (1) Pour tout ensemble X , pour tout ultrafiltre \mathcal{U} sur X et pour toute $f : X \rightarrow Y$, la limite $\lim_{x \rightarrow \mathcal{U}} f(x)$ existe ;
- (2) X est compact.

L'énoncé (1) est la définition de la compacité donnée par Bourbaki.

4. En utilisant la question précédente, montrer le théorème de Tychonoff : tout produit d'espaces compacts est compact.

♣ **Exercice 6** (Une construction de \mathbb{R}).

Soit $\mathcal{L} = (0, 1, +, -, \times, <)$ le langage des anneaux ordonnés. On rappelle qu'un *corps totalement ordonné* est une \mathcal{L} -structure K qui est un corps, et dans laquelle $<$ s'interprète par un ordre total compatible avec les opérations (c'est-à-dire que $\forall x, y, z \in K (x < y \Rightarrow x + z < y + z)$ et $\forall x, y, z \in K ((x < y \wedge z > 0) \Rightarrow xz < yz)$). On voit \mathbb{Q} comme une \mathcal{L} -structure ; soit \mathcal{U} un ultrafiltre non-principal sur \mathbb{N} , on notera \mathfrak{Q} l'ultrapuissance $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. On rappelle que \mathbb{Q} se plonge (élémentairement) dans \mathfrak{Q} via le plongement $q \mapsto [(q)_{n \in \mathbb{N}}]_{\mathcal{U}}$; on identifiera alors \mathbb{Q} à son image par ce plongement.

1. Montrer que \mathfrak{Q} est un corps totalement ordonné.
2. Soit $A = \{x \in \mathfrak{Q} \mid \exists q \in \mathbb{Q}_+^* - q < x < q\}$. Montrer que A est un sous-anneau de \mathfrak{Q} .
3. Soit $\mathfrak{M} = \{x \in A \mid \forall q \in \mathbb{Q}_+^* - q < x < q\}$. Montrer que \mathfrak{M} est un idéal maximal de A .
4. On pose $\mathfrak{R} = A/\mathfrak{M}$, qui est donc un corps. Montrer que la relation d'ordre $<$ sur A passe au quotient en une relation d'ordre total que l'on notera toujours $<$ sur \mathfrak{R} , et que $(\mathfrak{R}, 0, 1, +, -, \times, <)$ est un corps totalement ordonné.
5. Montrer que la restriction à \mathbb{Q} de l'application quotient $\mathfrak{Q} \rightarrow \mathfrak{R}$ est injective et que l'image de \mathbb{Q} par cette application est le sous-corps premier de \mathfrak{R} , que l'on identifiera toujours à \mathbb{Q} . Montrer que \mathbb{Q} est non-minoré, non majoré, et dense dans \mathfrak{R} (i.e. entre deux éléments distincts quelconques de \mathfrak{R} , il y a toujours un élément de \mathbb{Q}).
6. Montrer que toute partie non-vidée et majorée de \mathfrak{R} admet une borne supérieure (on pourra utiliser le théorème de Loś).

\mathbb{R} étant, par définition, l'unique corps totalement ordonné dont toute partie non-vidée et majorée admet une borne supérieure (on peut montrer par ailleurs l'unicité d'un tel corps, s'il existe), on vient donc de construire \mathbb{R} .

♣ **Exercice 7** (Un théorème de Hindman).

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de type Ramsey suivant, dû à Hindman : pour toute coloration des entiers naturels avec un nombre fini de couleurs, il existe $H \subseteq \mathbb{N}$ infini tel que tous les entiers de la forme $\sum_{n \in s} n$, pour $s \subseteq H$ fini et non-vidée, soient de même couleur.

1. On appelle *semigroupe compact* un espace topologique compact S muni d'une loi interne binaire \cdot associative telle que pour tout $y_0 \in S$, l'application $x \mapsto x \cdot y_0$ de S dans S soit continue¹. Montrer que pour tout semigroupe compact (S, \cdot) , il existe $x \in S$ tel que $x \cdot x = x$. (Indication : on pourra considérer un sous-semigroupe fermé minimal.)
2. Soit \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ultrafiltres sur \mathbb{N} . On définit $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la façon suivante : pour $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{W} \Leftrightarrow \mathcal{U} m \mathcal{V} n \ m + n \in A$. Montrer que \mathcal{W} est un ultrafiltre sur \mathbb{N} , et que si \mathcal{U} et \mathcal{V} sont non-principaux, alors \mathcal{W} l'est aussi.
3. On note $\gamma\mathbb{N}$ l'ensemble des ultrafiltres non-principaux sur \mathbb{N} . On voit $\gamma\mathbb{N}$ comme un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ que l'on munira de la topologie induite, où $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est identifié à $\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ que l'on munit de la topologie produit. Montrer que $(\gamma\mathbb{N}, +)$ est un semigroupe compact.
4. Les questions 1. et 3. nous donnent $\mathcal{U} \in \gamma\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$. On fixe $A \in \mathcal{U}$. Construire une suite décroissante $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{U} , avec $A_0 = A$, ainsi qu'une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels, telles que $\forall i \in \mathbb{N} \ n_i \in A_i$ et $\forall i \in \mathbb{N} \ \forall n \in A_{i+1} \ n_i + n \in A_i$.
5. Montrer que pour toute suite strictement croissante d'indices $i_0 < \dots < i_k$, on a $n_{i_0} + \dots + n_{i_k} \in A_{i_0}$.
6. Montrer le théorème de Hindman.
7. Montrer la version finie suivante du théorème de Hindman : pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N(n, k) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \geq N(n, k)$ et pour toute coloration de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ à l'aide de k couleurs, il existe $H \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de cardinal n tel que toutes les sommes non-vides d'éléments deux à deux distincts de H soient de même couleur.

II. Fonctions primitives récurives

◆ Exercice 8 (Codage).

On rappelle qu'on définit une application bijective :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{<\omega} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \end{array}$$

en posant $\langle \emptyset \rangle = 0$ et pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ non-vide, $\langle a_0, \dots, a_n \rangle = \pi(0)^{a_0} \dots \pi(n-1)^{a_{n-1}} \pi(n)^{a_n+1} - 1$, où $(\pi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est l'énumération strictement croissante des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^n & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \end{array}$$

est primitive récurive.

2. Montrer que l'application longueur $l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\omega}$, on ait $l(\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle) = n$, est primitive récurive.
3. Montrer que l'application de décodage $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ et tout $i \in \mathbb{N}$, $d(\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle, i)$ vaille a_i si $i < n$ et 0 sinon, est primitive récurive.

1. On ne demande pas à ce que l'application $(x, y) \mapsto x \cdot y$ soit continue; de ce fait, un nom plus adapté (mais un peu long) serait « semigroupe semitopologique compact ». Attention, dans d'autres contextes, l'appellation « semigroupe compact » peut désigner un semigroupe compact dont la loi est continue en le couple de ses variables!

4. Montrer que l'application de concaténation $c : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que pour tous $(a_0, \dots, a_{m-1}), (b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\omega}$, on ait $c(\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle, \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle) = \langle a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \rangle$, est primitive réursive.

◆ **Exercice 9** (Schémas de récurrence).

1. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $h, i : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$, $j, k : \mathbb{N}^{p+3} \longrightarrow \mathbb{N}$ des fonctions primitives rékursives. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par récurrence mutuelle par, pour tout $\bar{x} \in \mathbb{N}^p$ et tout $y \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= h(\bar{x}) \\ g(\bar{x}, 0) &= i(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y + 1) &= j(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y), g(\bar{x}, y)) \\ g(\bar{x}, y + 1) &= k(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y), g(\bar{x}, y)). \end{aligned}$$

Montrer que f et g sont primitives rékursives.

2. En déduire que la suite de Fibonacci, définie par $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n + 2) = F(n + 1) + F(n)$, est primitive réursive.
3. Soient $g : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{p+2} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $i : \mathbb{N}^{p+1} \rightarrow \mathbb{N}$ des fonctions primitives rékursives. On suppose que pour tout $\bar{x} \in \mathbb{N}^p$ et tout $y \in \mathbb{N}^*$, on a $i(\bar{x}, y) < y$. On définit la fonction $f : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$, par, pour tout $\bar{x} \in \mathbb{N}^p$ et tout $y \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, i(\bar{x}, y))). \end{aligned}$$

Montrer que f est primitive réursive.

III. La fonction d'Ackermann

On définit la fonction d'Ackermann $A : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ par, pour tous $n, x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A(0, x) &= x + 1 \\ A(n + 1, 0) &= A(n, 1) \\ A(n + 1, x + 1) &= A(n, A(n + 1, x)). \end{aligned}$$

◆ **Exercice 10** (Généralités).

- Vérifier que la fonction d'Ackermann est bien définie, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction $A : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ satisfaisant les relations ci-dessus.
- Histoire de se faire peur, exprimer $A(1, x)$, $A(2, x)$ et $A(3, x)$ en fonction de x .
- Montrer que A est strictement croissante en ses deux arguments.

◆ **Exercice 11** (Graphe de la fonction d'Ackermann).

1. Montrer que le graphe de la fonction d'Ackermann est primitif récursif. (On pourra utiliser un schéma de récurrence dans le genre de ceux de l'exercice 9, en un peu plus compliqué.)
2. En déduire que la fonction d'Ackermann est récursive totale.

Exercice 12 (La fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.).

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $A_n = A(n, \cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n^k = A_n \circ \dots \circ A_n$, avec k compositions. On dira qu'une fonction $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ domine une fonction $f : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^p$, on ait $f(x_1, \dots, x_n) \leq F(\max(x_1, \dots, x_n, K))$.

1. Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a $A_n^k(x) \leq A_{n+1}(x+k)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{C}_n l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$ pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_n^k domine f . On notera aussi $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{C}_n est clos par composition.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction obtenue par schéma de récurrence primitif à partir de deux fonctions de \mathcal{C}_n est dans \mathcal{C}_{n+1} .
 - (c) Montrer que \mathcal{C} contient toutes les fonctions primitives récursives.
3. En déduire que A n'est pas primitive récursive. En particulier, il existe une fonction non-primitive récursive dont le graphe est primitif récursif.