Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 11 : Interprétabilité, théorie des ensembles

15 et 18 décembre 2017

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

Les exercices 1 et 3 sont à préparer avant le TD et seront corrigés tout au début de la séance.

I. Interprétabilité

On notera $\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf}$ (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf}$) la théorie ZF (resp. ZFC) sans l'axiome de l'infini, et $\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf} + \neg\, \mathrm{Inf}$ (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\, \mathrm{Inf}$) la théorie ZF (resp. ZFC) où on a remplacé l'axiome de l'infini par sa négation.

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages. Une *interprétation* d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ dans une $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{N}$ est la donnée :

- d'une $\mathcal{L}'$-formule $\mathrm{Dom}(x)$ à une variable libre (on notera $\mathrm{Dom}^{\mathcal{N}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ qu'elle définit) ;
- pour tout symbole de relation k-aire R de $\mathcal{L}$, d'une $\mathcal{L}'$-formule $i(R)(x_1, \ldots, x_k)$ à k variables libres (on notera $i(R)^{\mathcal{N}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{N}^k$ qu'elle définit) ;
- et pour tout symbole de fonction k-aire f de $\mathcal{L}$, d'une $\mathcal{L}'$-formule $i(f)(x_1, \ldots, x_k, y)$ à $k+1$ variables libres, telle que $\mathcal{N} \vDash \forall \bar{x}\, \exists! y\, i(f)(\bar{x}, y)$ (on notera $i(f)^{\mathcal{N}}$ la fonction $\mathcal{N}^k \longrightarrow \mathcal{N}$ qu'elle définit) ;

telles que la $\mathcal{L}$-structure $i(\mathcal{M})$ dont l'ensemble de base est $\mathrm{Dom}^{\mathcal{N}}$ et où on a interprété respectivement chaque symbole de relation R et chaque symbole de fonction f de $\mathcal{L}$ par la relation $i(R)^{\mathcal{N}}$ et la fonction $i(f)^{\mathcal{N}}$, est isomorphe à $\mathcal{M}$ (ici, on a considéré les symboles de constante comme des symboles de fonction 0-aire). On dira que la structure $\mathcal{M}$ est *interprétable* dans $\mathcal{N}$ s'il existe une interprétation de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

(On autorise normalement, dans la définition d'interprétation, la structure $\mathcal{M}$ à être identifiée à une partie de $\mathcal{N}^k$ pour un certain k, et l'égalité de $\mathcal{M}$ à être interprétée par une relation sur $i(\mathcal{M})$ qui n'est pas forcément l'égalité ; ceci, permet notamment, par exemple, de dire que $\mathbb{Q}$ est interprétable dans $\mathbb{Z}$ (les deux étant munis du langage des anneaux). Dans ce TD, on se restreindra pour plus de simplicité à la définition donnée ci-dessus, qui suffira à couvrir tous les cas étudiés.)

Une *interprétation* d'une $\mathcal{L}$-théorie S dans une $\mathcal{L}'$-théorie T est la donnée :

- d'une $\mathcal{L}'$-formule $\mathrm{Dom}(x)$ à une variable libre, telle que $T \vdash \exists x\ \mathrm{Dom}(x)$;
- pour tout symbole de relation k-aire R de $\mathcal{L}$, d'une $\mathcal{L}'$-formule $i(R)(x_1, \ldots, x_k)$ à k variables libres ;
- et pour tout symbole de fonction k-aire f de $\mathcal{L}$, d'une $\mathcal{L}'$-formule $i(f)(x_1, \ldots, x_k, y)$ à $k+1$ variables libres, telle que $T \vdash \forall \bar{x}\, (\mathrm{Dom}(\bar{x}) \to \exists! y\, (\mathrm{Dom}(y) \wedge i(f)(\bar{x}, y)))$;

telles que pour tout modèle $\mathcal{N}$ de T, il existe un modèle $\mathcal{M}$ de S tel que la fomule Dom et les formules $i(s)$ pour $s \in L$ définissent une interprétation de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

♦ **Exercice 1** (Généralités sur l'interprétabilité)**.**

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages.

1. Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}'$-structure telle que $\mathcal{M}$ soit interprétable dans $\mathcal{N}$, via des formules Dom et $i(s)$ pour $s \in \mathcal{L}$. On notera $u : \mathcal{M} \longrightarrow i(\mathcal{M})$ un isomorphisme. Construire, pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ à n variables libres, une $\mathcal{L}'$-formule $i(\varphi)(x_1, \ldots, x_n)$ à n variables libres telle que pour tous $a_1, \ldots a_n \in \mathcal{M}$, on ait $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models i(\varphi)(u(\bar{a}))$.
2. Soient S une $\mathcal{L}$-théorie et T une $\mathcal{L}'$-théorie. Montrer l'équivalence entre :
   (a) Les formules Dom et $i(s)$ pour $s \in \mathcal{L}$ considérées à la question précédente définissent une interprétation de S dans T ;
   (b) $T \vdash \exists x \, \mathrm{Dom}(x)$, pour tout symbole de fonction f de $\mathcal{L}$, on a $T \vdash \forall \bar{x} \, (\mathrm{Dom}(\bar{x}) \rightarrow \exists! y \, (\mathrm{Dom}(y) \wedge i(f)(\bar{x}, y)))$, et pour tout $\varphi \in S$, on a $T \vdash i(\varphi)$.
3. Soient S une $\mathcal{L}$-théorie et T une $\mathcal{L}'$-théorie. On suppose que S est interprétable dans T. Montrer que si T est consistante, alors S l'est aussi.

On prend en général plutôt la définition équivalente donnée par la question 2 comme définition de l'interprétabilité, elle a l'avantage de ne pas faire référence aux modèles et donc d'être exprimable dans une métathéorie plus faible (on peut donc l'appliquer à la théorie des ensembles sans se faire de souci).

♦ **Exercice 2** ($\mathcal{PA}$ est interprétable dans $\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf}$)**.**

Justifier que $\mathcal{PA}$ est interprétable dans $\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf}$.

♦ **Exercice 3** (V_ω est interprétable dans $\mathbb{N}$)**.**

Montrer qu'il existe une unique bijection $\varphi : V_\omega \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tous $x, y \in V_\omega$, $x \in y$ si et seulement si le $\varphi(x)^{\text{ième}}$ chiffre de l'écriture en base 2 de $\varphi(y)$ est un 1. (Le $i^{\text{i ème}}$ chiffre de l'écriture en base 2 de n est celui correspondant à l'exposant 2^i.) Montrer que cette bijection définit une interprétation de V_ω (muni du langage des ensembles) dans $\mathbb{N}$ (muni du langage de l'arithmétique).

♦ **Exercice 4** ($\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg \, \mathrm{Inf}$ est interprétable dans $\mathcal{PA}$)**.**

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg \, \mathrm{Inf}$ est interprétable dans $\mathcal{PA}$.

On rappelle que dans le TD n° 9, on a construit une formule $\exp(x, y, z)$ du langage de l'arithmétique (notée abusivement $x^y = z$), qui, dans $\mathcal{PA}$, est fonctionnelle en x et en y, et satisfait les propriétés suivantes :
- $\forall x \, (x^0 = 1 \wedge x^1 = x)$;
- $\forall x, y, z, \; x^{y+z} = x^y x^z$;
- Pour tout $x > 1$, l'application $y \mapsto x^y$ est strictement croissante ;
- $\forall x, y, \; (x > 1 \rightarrow x^y > y)$.

On notera également, pour $y > 0$, $r(x, y)$ le reste de la division euclidienne de x par y.

L'intuition est donnée par l'interprétation de V_ω dans $\mathbb{N}$ donnée dans l'exercice précédent. On notera donc $\mathrm{Dom}(x)$ la formule $x = x$ et $x \; i(\in) \; y$ la formule $r(y, 2^{x+1}) \geqslant 2^x$ (ce qui correspond à l'intuition "le $x^{\text{ième}}$ chiffre de l'écriture en base 2 de y est un 1"). On va montrer que ceci définit une iterprétation de $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg \, \mathrm{Inf}$ dans $\mathcal{PA}$. Dans la suite de cet exercice, on se placera donc dans un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{PA}$, dans lequel on notera, pour simplifier, ε l'interprétation de $i(\in)$.

1. Montrer les propriétés suivantes, pour tous $x, y \in \mathcal{M}$:
   (a) Si $x > 0$, alors x est non-vide (au sens où $\exists z \in \mathcal{M}\ z \,\varepsilon\, x$) ;
   (b) Si $y \,\varepsilon\, x$, alors $y < x$;
   (c) Il existe $z \in \mathcal{M}$ tel que pour tout $t \in \mathcal{M}$, on ait $t \,\varepsilon\, z \Leftrightarrow t \,\varepsilon\, x \vee t = y$ (intuitivement, $z = x \cup \{y\}$) ;
   (d) Si $y \,\varepsilon\, x$, alors il existe $z < x$ tel que pour tout $t \in \mathcal{M}$, on ait $t \,\varepsilon\, z \Leftrightarrow t \,\varepsilon\, x \wedge t \neq y$ (intuitivement, $z = x \backslash \{y\}$).
2. En utilisant les résultats précédents, montrer que $\mathcal{M}$ muni de la relation ε est modèle de ZFC − Inf +¬ Inf, et conclure.

Exercice 5 (Interprétabilité et décidabilité)**.**

1. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages finis, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$ structure, $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}'$-structure, et T une $\mathcal{L}'$-théorie telle que $\mathcal{N} \models T$. On suppose que $\mathcal{M}$ s'interprète dans $\mathcal{N}$. On note S l'ensemble des $\mathcal{L}$-énoncés φ tels que $T \vdash i(\varphi)$. On suppose que T est décidable. Montrer que S est décidable.
2. Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel (c'est-à-dire que tout ses symboles sont des symboles de relation). On suppose que la théorie vide sur $\mathcal{L}$ est décidable. Montrer que $\mathcal{L}$ ne contient que des symboles de relation unaire. (Indication : on pourra utiliser à peu près tous les exercices précédents !)

La réciproque de la question 2. est vraie : la théorie vide sur un langage ne contenant que des symboles de relation unaire est décidable.

♣ **Exercice 6** ($\mathcal{PA}$ et ZFC − Inf +¬ Inf sont bi-interprétables)**.**

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages, S une $\mathcal{L}$-théorie et T une $\mathcal{L}'$-théorie. On dit que S et T sont bi-interprétables s'il existe une interprétation de S dans T (donnée par une formule Dom et des formules $i(s)$ pour $s \in \mathcal{L}$) et une interprétation de T dans S (donnée par une formule Dom′ et des formules $j(s)$ pour $s \in \mathcal{L}'$) telles que :

- $S \vdash \forall x \ \mathrm{Dom}'(x)$ et $T \vdash \forall x \ \mathrm{Dom}(x)$;
- Pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ à n variables libres, on a $S \vdash \forall \bar{x}(\varphi(x) \longleftrightarrow j(i(\varphi))(\bar{x})$;
- Pour toute $\mathcal{L}'$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ à n variables libres, on a $T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(x) \longleftrightarrow i(j(\varphi))(\bar{x})$.

Il s'agit d'une notion plus forte qu'être mutuellement interprétables. Dans cet exercice, on va montrer que $\mathcal{PA}$ et ZFC − Inf +¬ Inf sont bi-interprétables.

1. Définir une formule $\varphi(x, y)$ à deux variables libres du langage des ensembles définissant, dans tout modèle de ZFC − Inf +¬ Inf, une classe fonctionnelle bijective $F : \mathrm{Ord} \longrightarrow V$ tel que pour tous ordinaux α et β, on ait $F(\alpha) \in F(\beta)$ si et seulement si le $\alpha^{\text{ième}}$ chiffre de l'écriture en base 2 de β est un 1. (Remarquons que parler de l'écriture en base 2 d'un ordinal a ici un sens, puisque dans un modèle de ZFC − Inf +¬ Inf, tout ordinal est fini.)
2. Montrer qu'en "poussant en avant" les opérations ordinales par F, on obtient une interprétation de $\mathcal{PA}$ dans ZFC − Inf +¬ Inf. (Par exemple, si somme(x, y, z) est une formule définissant, dans ZFC − Inf +¬ Inf, la somme ordinale, alors on interprétera la formule $x + y = z$ de $\mathcal{PA}$ par $\exists x', y', z' \,(F(x', x) \wedge F(y', y) \wedge F(z', z) \wedge \text{somme}(x', y', z')$.)
3. Montrer que l'interprétation définie à la question précédente, ainsi que l'interprétation de ZFC − Inf +¬ Inf dans $\mathcal{PA}$ définie dans l'exercice 6, forment une bi-interprétation entre $\mathcal{PA}$ et ZFC − Inf +¬ Inf.

II. Théorie des ensembles

Exercice 7 (Axiome de l'infini)**.**

On se place dans la théorie ZF privée de l'axiome de l'infini. Montrer que dans cette théorie, l'axiome de l'infini est équivalent à l'existence d'un ensemble x et d'une injection $f : x \longrightarrow x$ non surjective.

Exercice 8 (Ensembles héréditairement transitifs)**.**

On travaille dans $ZF + AF$. On dira qu'un ensemble x est héréditairement transitif s'il est transitif et si tous ses éléments sont transitifs.

1. Montrer que les ordinaux sont héréditairement transitifs.
2. Montrer que les éléments d'un ensemble transitif sont héréditairement transitifs.
3. Montrer que tout ensemble héréditairement transitif est un ordinal.