Teorie čísel: Cvičení 1

14. února 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

Definice: Buď p prvočíslo a $n \in \mathbb{Z}$. Pak $v_p(n)$ značí největší celé $j \geq 0$ takové, že $p^j \mid n$; jde o *p-valuaci čísla n*. Zároveň definujeme $v_p(0) := \infty$.

0. Pro celá čísla a, b dokažte, že $a \mid b$ právě tehdy, když pro všech prvočísla p platí $v_p(a) \leq v_p(b)$.

1. Dokažte následující tvrzení s celými čísly a, b:
   (a) Pokud prvočíslo p dělí součin ab, tak dělí alespoň jedno z čísel a, b.
   (b) $a^2 \mid b^2$, právě když $a \mid b$.
   (c) Pokud $NSD(a, b) = 1$, pak $NSD(a^n, b^m) = 1$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Spočtěte $v_p(n)$ pro všechna prvočísla p a pro a) $n = 63$, b) $n = 170$, c) $n = 360$.

3. Ukažte, že pro prvočíslo p a $m, n \in \mathbb{Z}$ platí:
   (a) multiplikativita: $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$, speciálně $v_p(m^n) = nv_p(m)$,
   (b) celé číslo dané zlomkem: pokud je $\frac{m}{n}$ celé číslo, tak $v_p\left(\frac{m}{n}\right) = v_p(m) - v_p(n)$,
   (c) trojúhelníková nerovnost: $v_p(m + n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$. Ukažte, že pokud $v_p(m) \neq v_p(n)$, pak nastává rovnost.

4. Najděte příklad, kdy $v_p(a + b) > \max(v_p(a), v_p(b))$.

5. Rozmyslete si hodnoty valuace faktoriálů:
   (a) Pro přirozené číslo n a kladné reálné číslo $x \geq 1$ určete, kolik čísel z intervalu $[1, x]$ je dělitelných n.
   (b) Dokažte Legendreův vzorec, že $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$. (Nápověda: Uvědomte si, že suma je ve skutečnosti konečná. Kolik z činitelů v $n!$ přispěje do $v_p(n!)$ jedničkou? Kolik dvojkou?)

6. Spočtěte kolika nulami končí číslo 100!.

Další příklady:

7. Spočtěte $v_2(2^{60} - 6)$ a $v_3\left(\binom{80}{40}\right)$.

8. Rozhodněte, jestli jsou přirozená čísla a a b jednoznačně určena svým nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem.

9. **U**kažte, že pro každé n existuje n po sobě jdoucích složených čísel.

10. Pro přirozená čísla n, m rozhodněte zdali platí, že pokud $n^n \mid m^m$, pak $n \mid m$.

$*$ 11. Jsou dána přirozená čísla a, b, c splňující $a^b \mid b^c$, $a^c \mid c^b$. Dokažte, že $a^2 \mid bc$.

$*$ 12. Ukažte, že pro libovolná nezáporná celá čísla m, n platí, že $\binom{m+n}{m}$ dělí $\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}$.

$*$ 13. Dokažte $2^n \nmid n!$. Obecně pro prvočíslo p dokažte $p^n \nmid ((p-1)n)!$.

$*$ 14. Pro přirozené číslo n dokažte $v_p(n!) \leq \lfloor \frac{n-1}{p-1} \rfloor$.

$*$ 15. Dokažte, že pro přirozená čísla a, b, c, d splňující $ab = cd$ platí

$$NSD(a, c) \cdot NSD(a, d) = a \cdot NSD(a, b, c, d)$$

$*$ 16. Ukažte, že pro každé n existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž každé je dělitelné čtvercem nějakého prvočísla.