Teorie čísel: Cvičení 2

21. února 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

Věta: Buď $m \in \mathbb{N}$ takové, že m není čtverec. Předpokládejme, že Pellova rovnice $x^2 - my^2 = 1$ má alespoň jedno netriviální řešení. Pak existuje řešení (a_0, b_0) takové, že

$$\left\{(a, b) \mid a + b\sqrt{m} = \pm(a_0 + b_0\sqrt{m})^n, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

jsou právě všechna řešení.

Důkaz výše uvedené věty (spolu se zbytkem sekce 2.1 ze skript) bude ukázán v první části cvičení. Příklady s nekladným číslem budou ukázány na cvičení.

-1. Řešte rovnici $x^2 - 2y^2 = 1$ v $\mathbb{Z}$ a najděte alespoň dvě konkrétní řešení (x, y) takové, že $x > 0$, $y > 0$.

0. Ukažte, že rovnice $x^2 - 3y^2 = -1$ nemá v $\mathbb{Z}$ řešení.

1. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice:
   (a) $x^2 - 3y^2 = 1$;
   (b) $x^2 - 5y^2 = 1$;
   (c) $x^2 - 7y^2 = 1$.

2. Ukažte, že rovnice $x^2 - 7y^2 = -4$ nemá v $\mathbb{Z}$ řešení.

3. Najděte nějaké řešení rovnice $x^2 - 41y^2 = -1$ nebo dokažte, že žádné neexistuje. (*Řešte rovnici $x^2 - 41y^2 = 1$ v $\mathbb{Z}$.)

4. Dokažte, že pokud (x, y) je řešením Pellovy rovnice $x^2 - my^2 = 1$, pak $x + y\sqrt{m} > 1 \iff x, y > 0$.

Další příklady:

5. Dokažte, že pokud má řešení Pellova rovnice $x^2 - my^2 = -1$, pak má řešení i rovnice $x^2 - my^2 = 1$.

6. Nechť $B \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud má zobecněná Pellova rovnice $x^2 - my^2 = B$ alespoň 1 řešení, potom má nekonečně mnoho řešení.

7. Najděte alespoň 4 řešení (x, y), $x > 0$, $y > 0$ rovnice $x^2 - 3y^2 = -2$ v $\mathbb{Z}$.

8. Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$.

9. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je $\frac{n(n+1)}{2}$ čtverec.

10. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, že $n + 1$ i $3n + 1$ jsou druhé mocniny přirozených čísel.

11. Buď (x, y) celočíselným řešením rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$. Ukažte, že $6 \mid xy$.