Teorie čísel: Cvičení 2 – výsledky a vybraná vzorová řešení

21. února 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

Výsledky:

-1. minimální řešení $(3,2)$, množina všech řešení: $\{(a,b) \mid a+b\sqrt{2} = \pm(3+2\sqrt{2})^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Další explicitní řešení například $(3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$, tj. $(17,12)$.

0. Uvažte rovnici modulo 3.

1. a) minimální řešení $(2,1)$, množina všech řešení: $\{(a,b) \mid a+b\sqrt{3} = \pm(2+\sqrt{3})^n, n \in \mathbb{Z}\}$
   b) minimální řešení $(9,4)$, množina všech řešení: $\{(a,b) \mid a+b\sqrt{5} = \pm(9+4\sqrt{5})^n, n \in \mathbb{Z}\}$
   c) minimální řešení $(8,3)$, množina všech řešení: $\{(a,b) \mid a+b\sqrt{7} = \pm(8+3\sqrt{7})^n, n \in \mathbb{Z}\}$

2. Uvažte rovnici modulo 7.

3. Nejmenší řešení pro $x^2-41y^2 = -1$ je $(32,5)$ (nejmenší ve stejném smyslu jako pro klasickou Pellovu rovnici). (Jedno řešení těžší části $x^2-41y^2 = 1$ se dá najít jako $(32+5\sqrt{41})^2 = 2049+320\sqrt{41}$ – viz. příklad 5. Jde ukázat, že jde o minimální řešení, ale není to triviální.)

7. Například $(1,1)$, $(3,5)$, $(11,19)$, $(41,71)$. (jde o aplikaci příkladu 6.)

V příkladech 8, 9, 10 je hlavní myšlenka upravit vztahy ze zadání do tvaru, který po vhodné substituci dá přesně Pellovu rovnici (kterou už umíme řešit a zpětně tak získat řešení pro zadané proměnné).

Řešení vybraných příkladů:

Vzorová řešení příkladů $-1, 0, 4$ byla předvedena na cviku.

4)(hlavní myšlenka) Implikace zprava doleva je jasná ($x \geq 1$, $y \geq 1$). K opačné implikaci uvážíme vztah $(x+y\sqrt{m})(x-y\sqrt{m}) = 1$, ze kterého vzhledem k předpokladům plyne, že $0 < x-y\sqrt{m} < 1$. Z těchto nerovností lze při uvážení $x < 0$ nebo $y < 0$ dostat spor.

5,6) Uvažme (x_1,y_1) a (x_2,y_2), která jsou řešeními (zobecněných) Pellových rovnic $x_1^2-my_1^2 = A$ a $x_2^2-my_2^2 = B$. Jak bylo ukázáno na cvičení, pokud označíme $x_3+y_3\sqrt{m} = (x_1+y_1\sqrt{m})(x_2+y_2\sqrt{m})$, tak $x_3-y_3\sqrt{m} = (x_1-y_1\sqrt{m})(x_2-y_2\sqrt{m})$ (lze ověřit roznásobením). Po vynásobení těchto dvou rovnost9 dostaneme, že $x_3^2-my_3^2 = AB$.

Pokud tedy máme dvě netriviální řešení $x_1+y_1\sqrt{m}$, $x_2+y_2\sqrt{m}$ (klidně stejná) rovnice $x^2-my^2 = -1$, tak jejich součin je řešením rovnice $x^2-my^2 = 1$ (rozmyslete si, že netriviální). Podobně z jednoho řešení rovnice $x^2-my^2 = B$ umíme vygenerovat nekonečně mnoho přenásobením řešeními klasické Pellovy rovnice $x^2-my^2 = 1$ (rozmyslete si, že takto dostaneme nekonečně *různých* řešení).

11) Z příkladu -1. víme, že všechna řešení jsou tvaru $\{(a,b) \mid a+b\sqrt{2} = \pm(3+2\sqrt{2})^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Když uvážíme binomickou větu, tak dostaneme

$$a = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 3^{n-2i} \cdot (2\sqrt{2})^{2i},$$

$$b\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 3^{n-2i-1} \cdot (2\sqrt{2})^{2i+1}.$$

Odtud vidíme, že b je vždy dělitelné 2 a pokud je n liché, tak je a dělitelné 3, a naopak pokud je n sudé, tak je b dělitelné 3.