Teorie čísel: Cvičení 3

28. února 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

Konečné řetězové zlomky

0. Najděte hodnotu řetězového zlomku $[6, 9, 2]$. Spočtěte řetězový zlomek pro číslo $\frac{8}{5}$.

! 1. Vyjádřete následující konečné řetězové zlomky jako racionální čísla:
   (a) $[3, 5, 8]$;
   (b) $[1, 2, 3, 4]$;
   (c) $[2, 5, 1, 7]$.

! 2. Spočtěte řetězové zlomky pro následující racionální čísla:
   (a) $\frac{4}{3}$;
   (b) $\frac{25}{7}$;
   (c) $\frac{415}{93}$;

3. V závislosti na n určete, jakému racionálnímu číslu se rovná zlomek $[0, \overbrace{1, 1, ..., 1}^{n}]$.

4. Rozmyslete si následující rekurentní vztahy pro konečné řetězové zlomky:
   (a) $[a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + [a_1, ..., a_n]^{-1}$;
   (b) $[a_0, a_1, ..., a_n] = \left[a_0, ..., a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right]$;
   (c) $[a_0, a_1, ..., a_n] = \big[a_0, ..., a_{k-1}, [a_k, ..., a_n]\big]$ pro každé $0 < k \leq n$.

Fareyho zlomky

Definice: Nechť $n \in \mathbb{N}$, uvažujme všechny zlomky $\frac{p}{q} \in [0, 1]$ takové, že $NSD(p, q) = 1$ a $q \leq n$. Označme je $0 = f_0 < f_1 < \cdots < f_{m-1} < f_m = 1$. Tyto zlomky budeme nazývat Fareyho zlomky řádu n a tuto posloupnost budeme značit F_n.

Věta: *(Cauchy)* Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou sousední položky seznamu F_n. Pak $bc - ad = 1$.

! 5. Najděte posloupnost Fareyho zlomků řádu 6. Jaké vlastnosti má posloupnost jejich jmenovatelů?

! 6. Určete počet Fareyho zlomků řádu n.

! 7. Dokažte, že pro libovolné dva zlomky $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ je $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bd}$. Ukažte, že pro sousední Fareyho zlomky nastává rovnost. * Platí opačná implikace, tedy pokud nastává rovnost, tak jsou to sousední zlomky v F_n pro nějaké n?

8. Ukažte, že posloupnost jmenovatelů prvků F_n tvoří palindrom.

! 9. Pomocí Fareyho zlomků dokažte **Dirichletovu větu**: Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ takových, že $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

$*$ 10. Předpokládajte, že znáte řetězový zlomek pro prvek $\frac{p}{q}$ Fareyho posloupnosti F_q. Vyjádřete pomocí něj řetězové zlomky sousedních prvků.

$**$ 11. Dokažte, že délka posloupnosti F_n splňuje

$$|F_n| = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2\right) = \frac{1}{2}(n+3)n - \sum_{d=2}^{n} |F_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}|,$$

kde $\mu(d)$ je Möbiova funkce, která je definovaná pro každé $n \in \mathbb{N}$ následovně:

- $\mu(n) = 1$, pokud n je bezčtvercové se sudým počtem prvočíselných dělitelů;
- $\mu(n) = -1$, pokud n je bezčtvercové s lichým počtem prvočíselných dělitelů;
- $\mu(n) = 0$, pokud n je dělitelné druhou mocninou nějakého prvočísla.

Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s $*$ jsou náročnější.