Teorie čísel: Cvičení 3 – výsledky a vybraná řešení

28. února 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

Výsledky:

0. $\frac{116}{19}$, $[1, 1, 1, 2]$
1. $\frac{131}{41}$, $\frac{43}{30}$, $\frac{102}{47}$
2. $[1, 3]$, $[3, 1, 1, 3]$, $[4, 2, 6, 7]$
3. $\frac{F_{n-1}}{F_n}$, kde F_n je Fibonacciho posloupnost začínající $F_0 = F_1 = 1$.
5. $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\}$
6. $1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi(n)$, kde $\varphi(n)$ je Eulerova funkce
7. Opačná implikace platí.
9. Uvažte rozdíl mezi sousedními Fareyho zlomky (viz. příklad 7.)
10. Pokud označíme $\frac{p}{q} = [0, a_1, \ldots, a_n, 1]$ daný řetězový zlomek končící 1, tak vedlejší zlomky budou právě $[0, a_1, \ldots, a_n]$ a $[0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$

Věta: *(Cauchy)* Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou sousední položky seznamu F_n. Pak $bc - ad = 1$.
Důkaz: Víme, že $NSD(a, b) = 1$. Z toho z Bézoutovy rovnosti existují $x, y \in \mathbb{Z}$, že $bx - ay = 1$. Pro každé řešení (x, y) rovnice $bx - ay = 1$ jsou řešením i dvojice $(x_1, y_1) = (x + ra, y + rb)$ pro libovolné $r \in \mathbb{Z}$. Můžeme tedy najít r takové, že $0 \leq n - b < y_1 \leq n$.

Jistě $NSD(x_1, y_1) = 1$ (jako řešení té rovnice výše). Dále dostaneme $\frac{x_1}{y_1} - \frac{a}{b} = \frac{x_1 b - y_1 a}{y_1 b} = \frac{1}{y_1 b} > 0$. Tedy buď $\frac{x_1}{y_1} \in F_n$ nebo $\frac{x_1}{y_1} > 1$. Tak jako tak $\frac{x_1}{y_1} \geq \frac{c}{d}$, neboť je $\frac{c}{d}$ další prvek v F_n.

Pokud by pro spor $\frac{x_1}{y_1} > \frac{c}{d}$. Tudíž $x_1 d - c y_1 \geq 1$, neboť je to celé číslo. Podobně $bc - ad \geq 1$. Dohromady dostaneme

$$\frac{1}{y_1 b} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{a}{b} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{c}{d} + \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{x_1 d - c y_1}{d y_1} + \frac{bc - ad}{bd} \geq \frac{1}{d y_1} + \frac{1}{bd} = \frac{b + y_1}{b d y_1.} > \frac{n}{b d y_1.}$$

Tudíž $d > n$. To je ale spor s tím, že $\frac{c}{d} \in F_n$. Předpoklad tak byl mylný a musí nastat $\frac{x_1}{y_1} = \frac{c}{d}$. Z toho, že je ale (x_1, y_1) řešením rovnice $bx - ay = 1$ už dostáváme chtěný vztah $bc - ad = 1$.