Teorie čísel: Cvičení 4

7. března 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

-2. Určete řetězový zlomek a první tři sblížené zlomky čísla $\sqrt{2}$.

-1. Určete, jakému reálnému číslu odpovídá zlomek $[2, \overline{5, 3}]$.

0. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Určete, čemu se rovná $\left[k, \overline{1, 2k}\right]$.

! 1. Určete řetězové zlomky a první tři sblížené zlomky čísla $\sqrt{n}$ pro $n = 3, 11, 13$.

2. Najděte řetězový zlomek zlatého řezu $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

! 3. K zadanému periodickému řetězovému zlomku určete příslušné reálné číslo:
   (a) $\left[1, 2, \overline{3}\right]$;
   (b) $\left[1, \overline{6, 9}\right]$;
   (c) $\left[1, \overline{1, 1, 2}\right]$.

! 4. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Určete, čemu se rovná:
   (a) $\left[\overline{k}\right]$;
   (b) $\left[1, \overline{2, k}\right]$.

Další příklady:

5. Najděte n-tý sblížený zlomek ke $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ pro $k = 1$. ($*$ Těžší varianta pro obecné k.)

6. Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Najděte řetězový zlomek čísel
   (a) $\sqrt{k^2 + 1}$,
   (b) $\sqrt{k^2 - 1}$ (pro $k > 1$).

7. Dokažte, že pokud máme libovolná čísla $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ pro $i \geq 1$, tak existuje právě jedno reálné číslo ξ, že $[a_0, a_1, \ldots]$ je řetězovým zlomkem ξ. Jde postupovat například následujícími kroky:
   (a) Označme klasicky $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Cílem bude ukázat, že to splňuje číslo $\xi := \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.
   (b) Z identit z přednášky ukažte $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{q_n^2}$. Pomocí tohoto a znalosti konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ukažte, že je posloupnost $\frac{p_n}{q_n}$ Cauchyovská (a definice ξ je tak korektní).
   (c) Ukažte $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$ a podobně indukcí pro další koeficienty.

$*$ 8. Ukažte, že pokud je řetězový zlomek čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ od jistého místa periodický, pak je α algebraické číslo stupně 2.

$*$ 9. Pokud $D \in \mathbb{N}$ není čtverec, pak je řetězový zlomek čísla $\sqrt{D}$ periodický s předperiodou délky 1 (můžete taky zkusit ukázat). Ať $\sqrt{D} = \left[\left\lfloor \sqrt{D} \right\rfloor, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_l}\right]$. Ukažte:
   (a) Pokud $l = 1$, $a_1 = 2 \cdot \left\lfloor \sqrt{D} \right\rfloor$.
   (b) Pokud $l = 2$, $a_2 = 2 \cdot \left\lfloor \sqrt{D} \right\rfloor$.
   (c) Pokud $l = 3$, $a_1 = a_2$ a $a_3 = 2 \cdot \left\lfloor \sqrt{D} \right\rfloor$.
   (d) Pro obecné l ukažte, že platí $a_i = a_{l-i}$ pro $i = 1, \ldots l - 1$ a $a_l = 2 \cdot \left\lfloor \sqrt{D} \right\rfloor$.

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.
Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s $*$ jsou náročnější.