Teorie čísel: Cvičení 5

14. března 2022

Web: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html
Email: raska.martin@gmail.com

Věta: Nechť $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$. Nechť $l \in \mathbb{N}$ je minimální takové, že $\sqrt{m} = \left[a_0, \overline{a_1, ..., a_{l-1}, 2a_0}\right]$. Označme $\frac{p_n}{q_n}$ n-tý sblížený zlomek čísla $\sqrt{m}$.

(i) Pokud je l sudé, tak rovnice $x^2 - my^2 = -1$ nemá řešení $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ a minimální řešení (x, y) rovnice $x^2 - my^2 = 1$ je rovné (p_{l-1}, q_{l-1}).

(ii) Pokud je l liché, tak minimální řešení rovnice $x^2 - my^2 = -1$ je rovné (p_{l-1}, q_{l-1}) a minimální řešení rovnice $x^2 - my^2 = 1$ je rovné (p_{2l-1}, q_{2l-1}). Navíc platí, že $p_{2l-1} + q_{2l-1}\sqrt{m} = (p_{l-1} + q_{l-1}\sqrt{m})^2$.

-1. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice $x^2 - 41y^2 = \pm 1$.

0. Určete všechny dobré aproximace čísel $\frac{2}{5}$ a $\frac{5}{3}$.

! 1. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice:
   (a) $x^2 - 23y^2 = \pm 1$;
   (b) $x^2 - 13y^2 = \pm 1$;

2. V $\mathbb{Z}$ řešte rovnice:
   (a) $x^2 - 29y^2 = \pm 1$;
   (b) $x^2 - 61y^2 = \pm 1$.

! 3. Určete všechny dobré aproximace čísel $\frac{3}{10}$ a $\frac{7}{8}$.

! 4. Určete všechny dobré aproximace čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, pokud $\{\alpha\} = 0$, nebo $\{\alpha\} = \frac{1}{2}$.

5. Najděte všechny celočíselné hodnoty $A \in (-\sqrt{41}, \sqrt{41})$, pro které existují $x, y \in \mathbb{Z}$, že $x^2 - 41y^2 = A$.

Další příklady:

6. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\alpha\} \neq 0, \frac{1}{2}$, $n > \alpha > 0$. Nechť $\alpha = [a_0, a_1, ...]$ a $n - \alpha = [b_0, b_1, ...]$. Ukažte, že pak platí:
   (a) $b_0 = n - a_0 - 1$;
   (b) $a_1 = 1 \iff \{\alpha\} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \iff b_1 \geq 2$;
   (c) $\frac{r}{s}$ je dobrá aproximace $\alpha \iff n - \frac{r}{s}$ je dobrá aproximace $n - \alpha$.

7. Nalezněte první 4 členy řetězového zlomku $\pi = 3.1415926\ldots$ a první 4 jeho dobré aproximace.

8. Nechť $n > 0$ a nechť $\frac{p_n}{q_n}$ je n-tý sblížený zlomek čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$. Pak každý jiný zlomek $\frac{p}{q}$ s jmenovatelem q, $0 < q \leq q_n$, splňuje, že $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$.

∗ 9. Ukažte, že alespoň jeden z libovolných dvou po sobě jdoucích sblížených zlomků čísla $\alpha > 0$ splňuje $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$.

10. Buď $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$. Předpokládejme, že rovnice $x^2 - my^2 = -1$ má řešení. Buď $a + b\sqrt{m}$, $a, b > 0$, minimální řešení. Dokažte, že pak $\pm(a + b\sqrt{m})^k$, $k \in \mathbb{Z}$, dává všechna řešení rovnice $x^2 - my^2 = \pm 1$.

11. Ukažte, že pokud $\{\alpha\} > \frac{1}{2}$, pak sblížené zlomky $\frac{p_n}{q_n}, n \geq 1$, jsou všechny dobré aproximace α.

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.
Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s ∗ jsou náročnější.