

Teorie čísel: Cvičení 7

28. března 2022

Web: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~raskam/vyuka/tc.html>

Email: raska.martin@gmail.com

Definice: Obor R se nazývá eukleidovský, pokud na něm existuje *eukleidovská norma*, t.j. zobrazení $\nu : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující:

- $\nu(0) = 0$,
- pokud $a \mid b \neq 0$, pak $\nu(a) \leq \nu(b)$,
- pro všechna $a, b \in R$, $b \neq 0$, existují $q, r \in R$ taková, že $a = qb + r$ a $\nu(r) < \nu(b)$.

Věta: Eukleidovské obory jsou gaussovské.

Poznámka: V kvadratických rozšířeních $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ máme v teorii čísel normu $N(a + b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2$. Pokud máme štěstí, tak $|N(a + b\sqrt{m})|$ je příslušná eukleidovská norma. Často se nicméně stává, že tyto obory nejsou ani gaussovské. Norma v $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ je multiplikativní a prvek je invertibilní právě tehdy, když má normu ± 1 .

-2. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + 1 = y^5$.

-1. Dokažte, že obor $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ je eukleidovský.

0. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + y^2 = z^2$.

! 1. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + 1 = y^3$.

! 2. Dokažte, že obor $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ je eukleidovský.

! 3. Najděte všechny jednotky (čili invertibilní prvky) v oboru:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$,

(b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

! 4. Rozmyslete si, jak řešení zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - Dy^2 = A$ souvisí s normou v okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Co v tomto kontextu říká multiplikativita normy?

Další příklady:

5. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + y^2 = z^3$ pro x, y nesoudělná.

* 6. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + 4 = y^3$.

* 7. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 - 2 = y^3$.

(Poznámka: Rovnice $1 = a^3 + 3a^2b + 6ab^2 + 2b^3$ má v \mathbb{Z} jediné řešení $(a, b) = (1, 0)$.)

* 8. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + 4 = 3y^3$.

* 9. V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 - 1 = y^3$.

10. Ukažte, že obor $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ není eukleidovský, dokonce ani gaussovský. Najděte ireducibilní prvek, který není prvočinitel.

* 11. Buď $R = \mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right] = \mathbb{Z}\left[e^{\frac{2\pi i}{3}}\right]$.

(a) Dokažte, že R je eukleidovský s normou danou $N(x + y\sqrt{-3}) = x^2 + 3y^2$.

(b) Určete všechny invertibilní prvky v R .

(c) V \mathbb{Z} řešte rovnici $x^2 + 3 = y^3$.

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.

Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.

Úlohy s * jsou náročnější.