

Počítačová algebra: Cvičení 3

4. listopadu 2021

1. Sestrojte okruhy polynomů nad okruhy $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{13}$ a $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$. Rozložte nad těmito okruhy polynom $x^4 - 1$.
2. Naprogramujte funkci *random_integer_pol(deg,coef_range,base)*, která vám vrátí náhodný polynom stupně *deg* v proměnné *base* s celočíselnými koeficienty v rozsahu $(0, coef_range)$.
3. Naprogramujte funkce na vyčíslování polynomů v daném bodě α . Udělejte to jednak pomocí přímočarého vyhodnocení (počítání mocnin α), jednak pomocí Hornerova schématu. Porovnejte rychlosti navzájem a i se zabudovaným vyhodnocováním v Sagi.
4. Naprogramujte algoritmus na školské násobení dvou polynomů.
5. Najděte celé číslo, která má v modulární reprezenaci $x \rightarrow (x \bmod 251, x \bmod 1511, x \bmod 2048)$ hodnotu $(156, 1004, 751)$. (Existuje v Sagi funkce počítající Čínskou zbytkovou větu? Jak by se mohla jmenovat?)
6. Najděte nějaký polynom f nad $\mathbb{Z}_7$, který splňuje $f(3) = 2$, $f(-1) = 5$ a $f \equiv 4x + 3 \pmod{x^2 + 1}$. Jak vypadá množina všech takovýchto polynomů?
7. Naprogramujte Euklidův algoritmus na počítání NSD dvou polynomů v $\mathbb{Q}[x]$. Pozorujte, jak v průběhu výpočtu exponenciálně rostou koeficienty.
8. Naprogramujte funkci, která pro zadané hodnoty $a_i, b_i, 1 \leq i \leq n$ najde polynom splňující $f(a_i) = b_i$ pomocí Lagrangeova algoritmu.
9. Rozmyslete si, jak aplikovat Karacubův trik na rychlejší násobení polynomů a daný algoritmus naprogramujte. Porovnejte rychlost s klasickým školským násobením.